第 41 卷　第 7/8 期
2011 年 7 月

中 国 海 洋 大 学 学 报
PERIODICAL OF OCEAN UNIVERSITY OF CHINA

41(7/8):202～206
Jul., 2011

时滞不确定随机系统的鲁棒稳定性*

高存臣，崔红艳
（中国海洋大学数学科学学院，山东 青岛 266100）

摘　要： 主要研究了带有时滞的不确定随机系统的均方鲁棒指数稳定性问题。根据有关线性矩阵不等式理论，结合李亚普诺夫函数法，充分利用系统的扩散项，建立了 1 个新的时滞相关稳定判据，使文中的时滞不确定随机系统是鲁棒均方指数稳定的。给出了具体的数值例子说明了研究结果的可行性和有效性。

关键词： 随机系统；时滞；线性矩阵不等式；时滞相关指数稳定性

中图法分类号： O231.3　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1672-5174(2011)7/8-202-05

随着现代科学技术的发展，随机系统常带有不确定性和时间滞后。关于确定性系统的研究已经得到了全方面的关注，并得到了一些好的结果。近几年对于带有不确定项和时间滞后的系统也受到较大关注。

在过去几年里伴随着随机模型系统在科学和工程领域的重大作用，随机系统受到越来越多的关注[1-3]。特别是随机时滞系统，更加强调随机时滞系统模型的稳定性分析[4-6]，这些研究又可根据时滞的类型分为 2 类——时滞独立系统[7-9]和时滞相关系统[4-5,10]。一般来说，对于带有较小时滞随机系统时滞独立的结果要比时滞相关保守一些。最近，对于随机时滞系统的时滞相关稳定性问题的研究得到越来越多的关注[4-5,10-12]。

本文主要探讨不确定随机时滞系统的时滞相关稳定性，通过线性矩阵不等式的方法得到了一个关于不确定随机时滞系统的时滞相关指数稳定性的判剧。这个判据不仅能够更好的构建系统的扩散项，而且具有较小的保守性。最后给出了具体的实例来说明结果的可行性和有效性。

1　预备知识

在介绍内容之前，首先做如下的说明：

$(\Omega, F, \{F_t\}_{t\geqslant 0}, P)$是 1 个带有自然滤子的完全概率空间；$E[\cdot]$代表具有合适测度的期望算子；$w(t)$是定义在完全概率空间上的标准的布朗运动；如果 $\boldsymbol{A}$ 是一个向量或矩阵，那么 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示它的转置；若果 $\boldsymbol{P}$ 是一个方阵，那么 $\boldsymbol{P}>0(\boldsymbol{P}<0)$表示 $\boldsymbol{P}$ 是带有合适维数的对称正定(负定)矩阵；$\boldsymbol{P}>0(\boldsymbol{P}<0)$表示对称半正定(半负定)矩阵；$\boldsymbol{I}$ 代表单位矩阵；用 $\lambda_M(\cdot)$，$\lambda_m(\cdot)$分别表示矩阵的最大特征值和最小特征值；$|\cdot|$表示向量的欧式范数或矩阵的诱导范数；当 $h>0$ 时，$C([-h,0];\mathbf{R}^n)$表示定义在$[-h,0]$上的 n 维实函数 φ 的集合，其范数定义为 $\|\varphi\|=\sup\{|\varphi(\theta)|:-h\leqslant\theta\leqslant 0\}$；$C\ell^{p}_{F_0}([-h,0];\mathbf{R}^n)$表示 F_0 可测且 $E\|\varphi\|^2<\infty$的 $C([-h,0];\mathbf{R}^n)$一值随机变量的集合。

考虑如下的系统

$$\mathrm{d}x(t)=f(t)\mathrm{d}t+g(t)\mathrm{d}w(t) \tag{1}$$

其中
$$\begin{cases} f(t)=f(t,x_t)=\boldsymbol{A}_0(t)x(t)+\boldsymbol{A}_1(t)x(t-\tau) \\ g(t)=g(t,x_t)=\boldsymbol{H}_0(t)x(t)+\boldsymbol{H}_1(t)x(t-\tau) \end{cases} \tag{2}$$
对任意的 $t\geqslant 0$ 成立。

通过(2)式可以得到

$$|f(t)|+|g(t)|\leqslant C_L\|x(t)\|,\ \forall t\geqslant 0 \tag{3}$$

当 $t\geqslant 0$ 时，$x_0=\{x(\theta):-h\leqslant\theta\leqslant 0\}=\xi\in C^{b}_{F_0}([-h,0];\mathbf{R}^n)$，$x(t)\in\mathbf{R}^n$ 是状态向量。$\tau(t)$代表系统的时滞，是博雷尔可测函数。对任意 $t\geqslant 0$，$0\leqslant\tau(t)\leqslant h$，这里 h 是正常数。其中 $\boldsymbol{A}_i(t)$和 $\boldsymbol{H}_i(t)$，$i=0,1$，是带有不确定项的矩阵函数。$\boldsymbol{A}_i(t)=\boldsymbol{A}_i+\Delta\boldsymbol{A}_i(t)$，$\boldsymbol{H}_i(t)=\boldsymbol{H}_i+\Delta\boldsymbol{H}_i(t)$，$i=0,1$。这里 $\boldsymbol{A}_i$，$\boldsymbol{H}_i$ 是常数矩阵，而 $\Delta\boldsymbol{A}_i(t)$和 $\Delta\boldsymbol{H}_i(t)$是范数有界的且满足：

$$\begin{cases} \Delta\boldsymbol{A}_i(t)=\boldsymbol{L}_A\boldsymbol{F}_A(t)\boldsymbol{E}_{Ai} \\ \Delta\boldsymbol{H}_i(t)=\boldsymbol{L}_H\boldsymbol{F}_H(t)\boldsymbol{E}_{Hi} \end{cases} \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{L}_A$，$\boldsymbol{E}_{Ai}$，$\boldsymbol{L}_H$，$\boldsymbol{E}_{Hi}$是勒贝格可测的未知常数矩阵且满足

$$\boldsymbol{F}_A^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}_A(t)\leqslant\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{F}_H^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}_H(t)\leqslant\boldsymbol{I},\ \forall t\geqslant 0 \tag{5}$$

如果满足(4)，(5)那么存在参数不确定元素 $\Delta\boldsymbol{A}_i(t)$，$\Delta\boldsymbol{H}_i(t)$，$i=0,1$。

这里 $C_L=\sum_{i=0}^{1}(|\boldsymbol{A}_i|+|\boldsymbol{L}_A||\boldsymbol{E}_{Ai}|+|\boldsymbol{H}_i|+|\boldsymbol{L}_H||\boldsymbol{E}_{Hi}|)$。于是可知 $f(\cdot,\cdot)$和 $g(\cdot,\cdot)$都满足

* 基金项目：国家自然科学基金项目(60974025)；山东省自然科学重点基金项目(Z2006G11)资助
收稿日期：2010-07-13；修订日期：2011-05-11
作者简介：高存臣(1956-)，男，教授，博导。E-mail：ccgao@ouc.edu.cn

Lipschitz 条件和线性增长条件，所以可知随机泛函微分方程存在唯一解。

定义 1[8] 不确定随机系统(1)是均方指数稳定的，如果存在常数 λ，使得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln E|x(t;\xi)|^2\leqslant-\lambda \tag{6}$$

对所有的不确定项(4)和(5)都成立。

引理 1[9] 令 $u\in\mathbf{R}^q$，$v\in\mathbf{R}^l$，$\boldsymbol{M}\in\mathbf{R}^{q\times l}$，对任意的常数矩阵 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^{q\times q}$，$\boldsymbol{Y}\in\mathbf{R}^{q\times l}$，$\boldsymbol{Z}\in\mathbf{R}^{l\times l}$，若 $\begin{bmatrix}X & Y\\ Y^{\mathrm T} & Z\end{bmatrix}\geqslant 0$ 成立，则下面不等式成立

$$-2u^{\mathrm T}\boldsymbol{M}v\leqslant\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}^{\mathrm T}\begin{bmatrix}X & Y-M\\ Y^{\mathrm T}-M^{\mathrm T} & Z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}$$

引理 2[10] 存在任意对称正定矩阵 $\boldsymbol{G}\in\mathbf{R}^{l\times l}$ 和正数 r，如果存在一个向量函数 $v:[0\quad r]\to\mathbf{R}^l$，使得积分 $\int_0^r v^{\mathrm T}(s)\boldsymbol{G}v(s)\mathrm{d}s$ 和 $\int_0^r v(s)\mathrm{d}s$ 都存在，那么下面的不等式成立

$$r\int_0^r v^{\mathrm T}(s)\boldsymbol{G}v(s)\mathrm{d}s\geqslant\left(\int_0^r v(s)\mathrm{d}s\right)^{\mathrm T}\boldsymbol{G}\left(\int_0^r v(s)\mathrm{d}s\right)$$

引理 3[10] 对任意的常数矩阵 $\boldsymbol{M}\in\mathbf{R}^{q\times l}$，不等式

$$2u^{\mathrm T}\boldsymbol{M}v\leqslant ru^{\mathrm T}\boldsymbol{M}\boldsymbol{G}\boldsymbol{M}^{\mathrm T}u+\frac{1}{r}v^{\mathrm T}\boldsymbol{G}^{-1}v,\ u\in\mathbf{R}^q,\ v\in\mathbf{R}^l$$

对所有的对称正定矩阵 $\boldsymbol{G}\in\mathbf{R}^{l\times l}$ 和正数 r 成立。

引理 4[4] (Schur complement)对给定的常数矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_1$，$\boldsymbol{\Omega}_2$ 和 $\boldsymbol{\Omega}_3$ 满足 $\boldsymbol{\Omega}_1^{\mathrm T}=\boldsymbol{\Omega}_1$ 和 $\boldsymbol{\Omega}_2^{\mathrm T}=\boldsymbol{\Omega}_2>0$ 只要

$$\boldsymbol{\Omega}_1=\boldsymbol{\Omega}_3^{\mathrm T}\boldsymbol{\Omega}_2^{-1}\boldsymbol{\Omega}_3<0$$

则

$$\begin{bmatrix}\Omega_1 & \Omega_3^{\mathrm T}\\ \Omega_3 & -\Omega_2\end{bmatrix}<0\ \text{或者}\begin{bmatrix}-\Omega_2 & \Omega_3\\ \Omega_3^{\mathrm T} & \Omega_1\end{bmatrix}<0。$$

2 时滞相关指数稳定性

定理 1 若存在矩阵 $\boldsymbol{P}_{11}>0$，$\boldsymbol{R}<0$，$\boldsymbol{S}>0$，$\boldsymbol{Q}\geqslant0$，$\boldsymbol{W}\geqslant0$，$\boldsymbol{P}_{21}$，$\boldsymbol{P}_{22}$，$\boldsymbol{P}_{23}$，$\boldsymbol{P}_{31}$，$\boldsymbol{P}_{32}$，$\boldsymbol{P}_{33}$，$\boldsymbol{M}$ 和 $\varepsilon_{\mathrm A}>0$，$\varepsilon_{\mathrm H}>0$ 满足：

$$\begin{bmatrix}
\Phi_{11} & * & * & * & * & * & *\\
\Phi_{21} & \Phi_{22} & * & * & * & * & *\\
\Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} & * & * & * & *\\
\Phi_{41} & \Phi_{42} & \Phi_{43} & \Phi_{44} & * & 0 & 0\\
\Phi_{51} & \Phi_{52} & \Phi_{53} & \Phi_{54} & \Phi_{55} & 0 & 0\\
L_A^{\mathrm T}P_{21} & L_A^{\mathrm T}P_{22} & L_A^{\mathrm T}P_{23} & 0 & 0 & -\varepsilon_A I & 0\\
L_H^{\mathrm T}P_{31} & L_H^{\mathrm T}P_{32} & L_H^{\mathrm T}P_{33} & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_H I
\end{bmatrix}<0 \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix}W & M^{\mathrm T}\\ M & Q\end{bmatrix}\geqslant0 \tag{8}$$

则不确定随机系统(1)是鲁棒均方指数稳定的。这里

$\boldsymbol{\Phi}_{11}=\boldsymbol{P}_{21}^{\mathrm T}(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{A}_1)+(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{A}_1)^{\mathrm T}\boldsymbol{P}_{21}+\boldsymbol{P}_{31}^{\mathrm T}(\boldsymbol{H}_0+\boldsymbol{H}_1)+(\boldsymbol{H}_0+\boldsymbol{H}_1)^{\mathrm T}\boldsymbol{P}_{31}+h\boldsymbol{W}_{11}+\varepsilon_A(\boldsymbol{E}_{A0}+\boldsymbol{E}_{A1})^{\mathrm T}(\boldsymbol{E}_{A0}+\boldsymbol{E}_{A1})+\varepsilon_H(\boldsymbol{E}_{H0}+\boldsymbol{E}_{H1})^{\mathrm T}(\boldsymbol{E}_{H0}+\boldsymbol{E}_{H1})$，

$\boldsymbol{\Phi}_{21}=\boldsymbol{P}_{22}^{\mathrm T}(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{A}_1)+\boldsymbol{P}_{32}^{\mathrm T}(\boldsymbol{H}_0+\boldsymbol{H}_1)+\boldsymbol{P}_{11}-\boldsymbol{P}_{21}+h\boldsymbol{W}_{21}$，

$\boldsymbol{\Phi}_{31}=\boldsymbol{P}_{23}^{\mathrm T}(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{A}_1)+\boldsymbol{P}_{33}^{\mathrm T}(\boldsymbol{H}_0+\boldsymbol{H}_1)-\boldsymbol{P}_{31}+h\boldsymbol{W}_{31}$，

$\boldsymbol{\Phi}_{41}=h(\boldsymbol{M}_1-\boldsymbol{A}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{P}_{21}-\boldsymbol{H}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{P}_{31}-\varepsilon_A\boldsymbol{E}_{A1}^{\mathrm T}(\boldsymbol{E}_{A0}+\boldsymbol{E}_{A1})-\varepsilon_H\boldsymbol{E}_{H1}^{\mathrm T}(\boldsymbol{E}_{H0}+\boldsymbol{E}_{H1}))$，

$\boldsymbol{\Phi}_{51}=-\boldsymbol{A}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{P}_{21}-\boldsymbol{H}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{P}_{31}-\varepsilon_A\boldsymbol{E}_{A1}^{\mathrm T}(\boldsymbol{E}_{A0}+\boldsymbol{E}_{A1})-\varepsilon_H\boldsymbol{E}_{H1}^{\mathrm T}(\boldsymbol{E}_{H0}+\boldsymbol{E}_{H1})$，

$\boldsymbol{\Phi}_{22}=-\boldsymbol{P}_{22}^{\mathrm T}-\boldsymbol{P}_{22}+h(\boldsymbol{W}_{22}+\boldsymbol{R}+\boldsymbol{Q})$，

$\boldsymbol{\Phi}_{32}=-\boldsymbol{P}_{23}^{\mathrm T}-\boldsymbol{P}_{32}+h\boldsymbol{W}_{32}$，

$\boldsymbol{\Phi}_{42}=h(\boldsymbol{M}_2-\boldsymbol{A}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{P}_{22}-\boldsymbol{H}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{P}_{32})$，

$\boldsymbol{\Phi}_{52}=-\boldsymbol{A}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{P}_{22}-\boldsymbol{H}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{P}_{32}$，

$\boldsymbol{\Phi}_{33}=-\boldsymbol{P}_{33}^{\mathrm T}-\boldsymbol{P}_{33}+\boldsymbol{P}_{11}+h(\boldsymbol{W}_{33}+\boldsymbol{S})$，

$\boldsymbol{\Phi}_{43}=h(\boldsymbol{M}_3-\boldsymbol{A}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{P}_{23}-\boldsymbol{H}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{P}_{33})$，

$\boldsymbol{\Phi}_{53}=-\boldsymbol{A}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{P}_{23}-\boldsymbol{H}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{P}_{33}$，

$\boldsymbol{\Phi}_{44}=-h\boldsymbol{R}+\varepsilon_A h^2\boldsymbol{E}_{A1}^{\mathrm T}\boldsymbol{E}_{A1}+\varepsilon_H h^2\boldsymbol{E}_{H1}^{\mathrm T}\boldsymbol{E}_{H1}$，

$\boldsymbol{\Phi}_{54}=h(\varepsilon_A\boldsymbol{E}_{A1}^{\mathrm T}\boldsymbol{E}_{A1}+\varepsilon_H\boldsymbol{E}_{H1}^{\mathrm T}\boldsymbol{E}_{H1})$，

$\boldsymbol{\Phi}_{55}=-\boldsymbol{S}+\varepsilon_A\boldsymbol{E}_{A1}^{\mathrm T}\boldsymbol{E}_{A1}+\varepsilon_H\boldsymbol{E}_{H1}^{\mathrm T}\boldsymbol{E}_{H1}$，

$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}W_{11} & * & *\\ W_{21} & W_{22} & *\\ W_{31} & W_{32} & W_{33}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{M}=[M_1,\quad M_2\quad M_3]$，$*$ 代表矩阵的对称部分。

证明 根据公式(1)，可以得到

当 $t\geqslant0$ 时，对任意的 $t_2\geqslant t_1\geqslant0$，有

$$x(t_2)-x(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}f(s)\mathrm{d}s+g(s)\mathrm{d}w(s) \tag{9}$$

通过(2)式和(9)式，对任意的 $t\geqslant h$ 可以得到

$$f(t)=\sum_{i=0}^{1}\boldsymbol{A}_i(t)x(t)-\boldsymbol{A}_1(t)\int_{t-\tau}^{t}f(s)\mathrm{d}s+g(s)\mathrm{d}w(s) \tag{10}$$

$$g(t)=\sum_{i=0}^{1}\boldsymbol{H}_i(t)x(t)-\boldsymbol{H}_1(t)\int_{t-\tau}^{t}f(s)\mathrm{d}s+g(s)\mathrm{d}w(s) \tag{11}$$

选择系统(9)的李亚普诺夫函数为

$$V(t)=V_1(t)+V_2(t)+V_3(t) \tag{12}$$

这里

$V_1(t)=x^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{P}_{11}x(t)$，

$V_2(t)=\int_{t-h}^{t}(s-t+h)f^{\mathrm T}(s)(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{Q})f(s)\mathrm{d}s$，

$V_3(t)=\int_{t-h}^{t}(s-t+h)g^{\mathrm T}\boldsymbol{S}g(s)\mathrm{d}s$，

对任意的 $t\geqslant h$，通过 Itô 公式，可以得到

$$\mathrm{d}V(t)=\ell V(t)\mathrm{d}(t)+\sigma(t)\mathrm{d}\omega(t) \tag{13}$$

其中

$$\begin{cases}\ell V(t)=2x^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{P}_{11}f(t)+\dot V_2(t)+\dot V_3(t)\\ \sigma(t)=2x^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{P}_{11}g(t)\end{cases} \tag{14}$$

令

$$\boldsymbol{y}(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\f(t)\\g(t)\end{bmatrix},\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}P_{11}&0&0\\P_{21}&P_{22}&P_{23}\\P_{31}&P_{32}&P_{33}\end{bmatrix},$$

通过等式(10)和(11)，可以得到

$$2x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_{11}f(t)=2\begin{bmatrix}x(t)\\f(t)\\g(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}P_{11}&P_{21}^{\mathrm{T}}&P_{31}^{\mathrm{T}}\\0&P_{22}^{\mathrm{T}}&P_{32}^{\mathrm{T}}\\0&P_{23}^{\mathrm{T}}&P_{33}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f(t)\\0\\0\end{bmatrix}=$$

$$2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}f(t)\\0\\0\end{bmatrix}=$$

$$2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\left\{\begin{bmatrix}0&I&0\\\sum_{i=0}^{1}A_i(t)&-I&0\\\sum_{i=0}^{1}H_i(t)&0&-I\end{bmatrix}\times\boldsymbol{y}(t)-\begin{bmatrix}0\\A_1(t)\\H_1(t)\end{bmatrix}\int_{t-\tau}^{t}f(s)\mathrm{d}s+g(s)\mathrm{d}w(s)\right\}\quad(15)$$

由引理1和等式(9)～(11)，有

$$-2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}[0\quad A_1^{\mathrm{T}}(t)\quad H_1^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}\int_{t-\tau}^{t}f(s)\mathrm{d}s=\int_{t-\tau}^{t}-2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}[0\quad A_1^{\mathrm{T}}(t)\quad H_1^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}f(s)\mathrm{d}s\leqslant\int_{t-\tau}^{t}\begin{bmatrix}y(t)\\f(s)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\cdot\begin{bmatrix}W&*\\M-[0\quad A_1(t)\quad H_1(t)]P&Q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y(t)\\f(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s\leqslant h\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\cdot$$
$$\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}(t)+\int_{t-h}^{t}f^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Q}f(s)\mathrm{d}s+2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}[0\quad A_1^{\mathrm{T}}(t)\quad H_1^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}})\int_{t-\tau}^{t}f(s)\mathrm{d}s-2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}[0\quad \Delta A_1^{\mathrm{T}}(t)\quad \Delta H_1^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}\int_{t-\tau}^{t}f(s)\mathrm{d}s\quad(16)$$

把(16)式代入(15)可以得到

$$2x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_{11}^{\mathrm{T}}f(t)\leqslant\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)[P^{\mathrm{T}}\bar{A}+\bar{A}^{\mathrm{T}}P+hW]\boldsymbol{y}(t)+2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{A}_H(t)x(t)+2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}[0\quad A_1^{\mathrm{T}}\quad H_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}})\int_{t-\tau}^{t}f(s)\mathrm{d}s-2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}[0\quad A_1^{\mathrm{T}}\quad H_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\int_{t-\tau}^{t}g(s)\mathrm{d}w(s)+\int_{t-h}^{t}f^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Q}f(s)\mathrm{d}s-2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}[0\quad \Delta A_1^{\mathrm{T}}(t)\quad \Delta H_1^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}\times\left(\int_{t-\tau}^{t}f(s)\mathrm{d}s+\int_{t-\tau}^{t}g(s)\mathrm{d}w(s)\right)\quad(17)$$

这里

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}0&I&0\\\sum_{i=0}^{1}A_i&-I&0\\\sum_{i=0}^{1}H_i&0&-I\end{bmatrix},$$

和

$$\Delta\boldsymbol{A}_H(t)=\begin{bmatrix}0\\\sum_{i=0}^{1}A_i(t)\\\sum_{i=0}^{1}H_i(t)\end{bmatrix}。$$

令

$\bar{\boldsymbol{E}}_A=[\sum_{i=0}^{1}E_{Ai}\quad 0\quad 0\quad -hE_{A1}\quad -E_{A1}]$，

$\bar{\boldsymbol{L}}_A^{\mathrm{T}}=[L_A^{\mathrm{T}}P_{21}\quad L_A^{\mathrm{T}}P_{22}\quad L_A^{\mathrm{T}}P_{23}\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}$，

$\bar{\boldsymbol{E}}_H=[\sum_{i=0}^{1}E_{Hi}\quad 0\quad 0\quad -hE_{H1}\quad -E_{H1}]$，

$\bar{\boldsymbol{L}}_H^{\mathrm{T}}=[L_H^{\mathrm{T}}P_{31}\quad L_H^{\mathrm{T}}P_{32}\quad L_H^{\mathrm{T}}P_{33}\quad 0\quad 0]$，

$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)=[z_1^{\mathrm{T}}(t)\quad z_2^{\mathrm{T}}(t)\quad z_3^{\mathrm{T}}(t)\quad z_4^{\mathrm{T}}(t)\quad z_5^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}=[x^{\mathrm{T}}(t)f^{\mathrm{T}}(t)g^{\mathrm{T}}(t)\frac{1}{h}\int_{t-\tau}^{t}f^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\int_{t-\tau}^{t}g^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}w(s)]^{\mathrm{T}}$

通过引理3，得

$$2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\left\{[0\quad\sum_{i=0}^{1}\Delta A_i^{\mathrm{T}}(t)\quad 0]^{\mathrm{T}}x(t)-[0\quad\Delta A_1^{\mathrm{T}}(t)\quad 0]^{\mathrm{T}}\times\left(\int_{t-\tau}^{t}f^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s)+\int_{t-\tau}^{t}g^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}w(s)\right)\right\}=2\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\bar{\boldsymbol{L}}_A\boldsymbol{F}_A(t)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}_A\boldsymbol{z}(t)\leqslant\varepsilon_A^{-1}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\bar{\boldsymbol{L}}_A\bar{\boldsymbol{L}}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}(t)+\varepsilon_A\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\bar{\boldsymbol{E}}_A^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{E}}_A\boldsymbol{z}(t)\quad(18)$$

且

$$2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\left\{[0\quad 0\quad\sum_{i=0}^{1}\Delta H_i^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}x(t)-[0\quad 0\quad\Delta H_1^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}\times\left(\int_{t-\tau}^{t}f(s)\mathrm{d}s+\int_{t-\tau}^{t}g(s)\mathrm{d}w(s)\right)\right\}\leqslant\varepsilon_H^{-1}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\bar{\boldsymbol{L}}_H\bar{\boldsymbol{L}}_H^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}(t)+\varepsilon_H\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\bar{\boldsymbol{E}}_H^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{E}}_H\boldsymbol{z}(t)\quad(19)$$

由(18)式和(19)式可得

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\left\{\Delta\boldsymbol{A}_H(t)x(t)-[0\quad\Delta A_1^{\mathrm{T}}(t)\quad\Delta H_1^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}\times\left(\int_{t-\tau}^{t}f(s)\mathrm{d}s+\int_{t-\tau}^{t}g(s)\mathrm{d}w(s)\right)\right\}\leqslant\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)[\varepsilon_A^{-1}\bar{\boldsymbol{L}}_A\bar{\boldsymbol{L}}_A^{\mathrm{T}}+\varepsilon_A\bar{\boldsymbol{E}}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_A+\varepsilon_H^{-1}\bar{\boldsymbol{L}}_H\bar{\boldsymbol{L}}_H^{\mathrm{T}}\bar{z}(t)+\varepsilon_H\bar{\boldsymbol{E}}_H^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{E}}_H]\boldsymbol{z}(t)\quad(20)$$

结合不等式(15)～(20)可得

$$2x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_{11}f(t)+g^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_{11}g(t)\leqslant\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{z}(t)+\int_{t-h}^{t}f^{\mathrm{T}}(s)\cdot\boldsymbol{Q}f(s)\mathrm{d}s\quad(21)$$

这里$\boldsymbol{\Gamma}$为对称矩阵

$$\boldsymbol{\Gamma}=\begin{bmatrix}\Gamma_{11}&*&*&*&*\\\Gamma_{21}&\Gamma_{22}&*&*&*\\\Gamma_{31}&\Gamma_{32}&\Gamma_{33}&*&*\\\Gamma_{41}&\Gamma_{42}&\Gamma_{43}&\Gamma_{44}&*\\\Gamma_{51}&\Gamma_{52}&\Gamma_{53}&\Gamma_{54}&\Gamma_{55}\end{bmatrix}$$

其中

$\boldsymbol{\Gamma}_{11}=\boldsymbol{P}_{21}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{A}_1)+(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{A}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{21}+\boldsymbol{P}_{31}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}_0+\boldsymbol{H}_1)+(\boldsymbol{H}_0+\boldsymbol{H}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{31}+h\boldsymbol{W}_{11}+\varepsilon_A(\boldsymbol{E}_{A0}+\boldsymbol{E}_{A1})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}_{A0}+\boldsymbol{E}_{A1})+\varepsilon_H(\boldsymbol{E}_{H0}+\boldsymbol{E}_{H1})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}_{H0}+\boldsymbol{E}_{H1})+\varepsilon_A^{-1}\boldsymbol{P}_{21}^{\mathrm{T}}L_AL_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{21}+\varepsilon_H^{-1}\boldsymbol{P}_{31}^{\mathrm{T}}L_HL_H^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{31}$，

$\boldsymbol{\Gamma}_{21}=\boldsymbol{P}_{22}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{A}_1)+\boldsymbol{P}_{32}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}_0+\boldsymbol{H}_1)+\boldsymbol{P}_{11}-\boldsymbol{P}_{21}+h\boldsymbol{W}_{21}+$

$\varepsilon_A^{-1}\boldsymbol{P}_{22}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_A\boldsymbol{L}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{21}+\varepsilon_H^{-1}\boldsymbol{P}_{32}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_H\boldsymbol{L}_H^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{31}$,

$\boldsymbol{\Gamma}_{31}=\boldsymbol{P}_{23}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{A}_1)+\boldsymbol{P}_{33}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}_0+\boldsymbol{H}_1)-\boldsymbol{P}_{31}+h\boldsymbol{W}_{31}+\varepsilon_A^{-1}\boldsymbol{P}_{23}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_A\boldsymbol{L}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{21}+\varepsilon_H^{-1}\boldsymbol{P}_{33}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_H\boldsymbol{L}_H^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{31}$,

$\boldsymbol{\Gamma}_{41}=h(\boldsymbol{M}_1-\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{21}-\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{31}-\varepsilon_A\boldsymbol{E}_{A1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}_{A0}+\boldsymbol{E}_{A1})-\varepsilon_H\boldsymbol{E}_{H1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}_{H0}+\boldsymbol{E}_{H1}))$,

$\boldsymbol{\Gamma}_{51}=-\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{21}-\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{31}-\varepsilon_A\boldsymbol{E}_{A1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}_{A0}+\boldsymbol{E}_{A1})-\varepsilon_H\boldsymbol{E}_{H1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}_{H0}+\boldsymbol{E}_{H1})$,

$\boldsymbol{\Gamma}_{22}=-\boldsymbol{P}_{22}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{P}_{22}+h\boldsymbol{W}_{22}+\varepsilon_A^{-1}\boldsymbol{P}_{22}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_A\boldsymbol{L}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{22}+\varepsilon_H^{-1}\boldsymbol{P}_{32}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_H\boldsymbol{L}_H^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{32}$,

$\boldsymbol{\Gamma}_{32}=-\boldsymbol{P}_{23}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{P}_{32}+h\boldsymbol{W}_{32}+\varepsilon_A^{-1}\boldsymbol{P}_{23}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_A\boldsymbol{L}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{21}+\varepsilon_H^{-1}\boldsymbol{P}_{33}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_H\boldsymbol{L}_H^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{32}$,

$\boldsymbol{\Gamma}_{42}=h(\boldsymbol{M}_2-\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{22}-\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{32})$,

$\boldsymbol{\Gamma}_{52}=-\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{22}-\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{32}$,

$\boldsymbol{\Gamma}_{33}=-\boldsymbol{P}_{33}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{P}_{33}+\boldsymbol{P}_{11}+h\boldsymbol{W}_{33}+\varepsilon_A^{-1}\boldsymbol{P}_{23}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_A\boldsymbol{L}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{23}+\varepsilon_H^{-1}\boldsymbol{P}_{33}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_H\boldsymbol{L}_H^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{33}$,

$\boldsymbol{\Gamma}_{43}=h(\boldsymbol{M}_3-\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{23}-\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{33})$,

$\boldsymbol{\Gamma}_{53}=-\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{23}-\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{33}$,

$\boldsymbol{\Gamma}_{44}=\varepsilon_A h^2\boldsymbol{E}_{A1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_{A1}+\varepsilon_H h^2\boldsymbol{E}_{H1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_{H1}$,

$\boldsymbol{\Gamma}_{54}=h(\varepsilon_A\boldsymbol{E}_{A1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_{A1}+\varepsilon_H\boldsymbol{E}_{H1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_{H1})$,

$\boldsymbol{\Gamma}_{55}=\varepsilon_A\boldsymbol{E}_{A1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_{A1}+\varepsilon h\boldsymbol{E}_{H1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_{H1}$,

直接由引理 2 可得

$$\dot V_2(t)=\boldsymbol{z}_2^{\mathrm{T}}(t)h(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{Q})\boldsymbol{z}_2(t)-\boldsymbol{z}_4^{\mathrm{T}}(t)h\boldsymbol{R}\boldsymbol{z}_4(t)-r_f(t)-\int_{t-h}^{t}f^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Q}f(s)\mathrm{d}s \tag{22}$$

$$\dot V_3(t)=\boldsymbol{z}_3^{\mathrm{T}}(t)h\boldsymbol{S}\boldsymbol{z}_2(t)-\int_{t-\tau}^{t}g^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{S}g(s)\mathrm{d}s-r_g(t) \tag{23}$$

其中

$$r_f(t)=\int_{t-h}^{t}f^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}f(s)\mathrm{d}s-\boldsymbol{z}_4^{\mathrm{T}}(t)h\boldsymbol{R}\boldsymbol{z}_4(t)\geqslant 0$$

$$r_g(t)=\int_{t-h}^{t-\tau}g^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{S}g(s)\mathrm{d}s\geqslant 0$$

对所有的 $t\geqslant h$ 都成立。

把(21)~(23)式代入(14)式可得

$$\ell V(t)\leqslant\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{z}(t)+\boldsymbol{z}_2^{\mathrm{T}}(t)h(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{Q})\boldsymbol{z}_2(t)+\boldsymbol{z}_3^{\mathrm{T}}(t)h\boldsymbol{S}\boldsymbol{z}_2(t)-\boldsymbol{z}_4^{\mathrm{T}}(t)h\boldsymbol{R}\boldsymbol{z}_4(t)-\int_{t-\tau}^{t}g^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{S}g(s)\mathrm{d}s-r_f(t)-r_g(t) \tag{24}$$

由等距同构可得

$$\mathrm{E}[\boldsymbol{z}_5^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{S}\boldsymbol{z}_5(t)]=\mathrm{E}[\int_{t-\tau}^{t}g^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{S}g(s)\mathrm{d}s]。$$

因此,在(24)式两边同时取期望可得

$\mathrm{E}V(t)\leqslant\mathrm{E}[\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\bar{\boldsymbol{\Gamma}}\boldsymbol{z}(t)-r_f(t)-r_g(t)]$,

其中

$\bar{\boldsymbol{\Gamma}}=\boldsymbol{\Gamma}+\mathrm{diag}[0,h(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{Q}),hS,-hR,-S]$

由舒尔补引理,不等式(7)可得 $\bar{\boldsymbol{\Gamma}}<0$

所以有

$$\mathrm{E}\ell V(t)\leqslant-\lambda_0\mathrm{E}|z(t)|^2-\mathrm{E}[r_f(t)]-\mathrm{E}[r_g(t)]\leqslant-\lambda_0\mathrm{E}\cdot[|z_1(t)|^2+|z_4(t)|^2+|z_5(t)|^2]-\mathrm{E}[r_f(t)]-\mathrm{E}[r_g(t)]\leqslant-\lambda_0\mathrm{E}|x(t)|^2-\mathrm{E}[\boldsymbol{z}_4^{\mathrm{T}}(t)(\lambda_0\boldsymbol{I}-h\boldsymbol{R})\boldsymbol{z}_4(t)]-\mathrm{E}\int_{t-h}^{t}f^{\mathrm{T}}(s)\cdot\boldsymbol{R}f(s)\mathrm{d}s-\lambda_g\mathrm{E}\int_{t-h}^{t}|g(s)|^2\mathrm{d}s,$$

其中

$\lambda_0=\lambda_m(-\bar{\boldsymbol{\Gamma}})>0,\lambda_g=\min\{\lambda_0,\lambda_m(s)\}>0$

由(12)式可得

$$\alpha_0|x(t)|^2\leqslant V(t)\leqslant\alpha_1|x(t)|^2+h\int_{t-h}^{t}f^{\mathrm{T}}(s)(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{Q})\cdot f(s)\mathrm{d}s+\alpha_g\int_{t-h}^{t}|g(s)|^2\mathrm{d}s$$

对任意的 $t\geqslant h$ 都成立,其中

$\alpha_0=\lambda_m(\boldsymbol{P}_{11}),\alpha_1=\lambda_M(\boldsymbol{P}_{11}),\alpha_g=h\lambda_M(\boldsymbol{S})$,存在 $\varepsilon>0$,使得

$\lambda_0\geqslant\varepsilon\alpha_1,\lambda_g\geqslant\varepsilon\alpha_g,\lambda_0\geqslant\varepsilon\alpha_f,\boldsymbol{R}_f>0$,

其中 $\alpha_f=h^2\lambda_M(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{Q}),\boldsymbol{R}_f=\boldsymbol{R}-\varepsilon h(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{Q})$。

通过 itô 公式可得

$$\mathrm{d}[\mathrm{e}^{\varepsilon s}V(s)]=\mathrm{e}^{\varepsilon s}[\varepsilon V(s)+\ell V(s)]\mathrm{d}s+\mathrm{e}^{\varepsilon s}\sigma(s)\mathrm{d}w(s)。$$

令 $t_0=h$,对任意 $t\geqslant t_0$ 再应用引理 2,可得

$$\mathrm{E}[\mathrm{e}^{\varepsilon t}V(t)]-\mathrm{E}[\mathrm{e}^{\varepsilon t_0}V(t_0)]=\mathrm{E}\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\varepsilon s}[\varepsilon V(s)+\ell V(s)]\mathrm{d}s\leqslant\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\varepsilon s}\{\mathrm{E}[(\varepsilon\alpha_1-\lambda_0)|x(s)|^2-\boldsymbol{z}_4^{\mathrm{T}}(s)(\lambda_0\boldsymbol{I}-h\boldsymbol{R})\boldsymbol{z}_4(s)-\int_{s-h}^{s}f(v)\boldsymbol{R}_f f(v)\mathrm{d}v+(\varepsilon\alpha_g-\lambda_g)\int_{t-h}^{t}|g(v)|^2\mathrm{d}v]\}\mathrm{d}s\leqslant-\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\varepsilon s}\{\mathrm{E}[\boldsymbol{z}_4^{\mathrm{T}}(s)(\lambda_0\boldsymbol{I}-h\boldsymbol{R}+h\boldsymbol{R}_f)\boldsymbol{z}_4(s)]\}\mathrm{d}s\leqslant-\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\varepsilon s}\{\mathrm{E}[\boldsymbol{z}_4^{\mathrm{T}}(s)(\lambda_0\boldsymbol{I}-\varepsilon h^2(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{Q}))\boldsymbol{z}_4(s)]\}\mathrm{d}s\leqslant-\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\varepsilon s}\{\mathrm{E}[(\lambda_0-\varepsilon\alpha_f)|\boldsymbol{z}_4(s)|^2]\}\mathrm{d}s\leqslant 0$$

通过线性增长条件(3),存在正常数 C_1 和 C_2 使得对所有的 $t\geqslant t_0$ 下式成立

$$\mathrm{e}^{\varepsilon t}\mathrm{E}V(t)\leqslant\mathrm{e}^{\varepsilon t_0}\mathrm{E}V(t_0)\leqslant C_1+C_2\mathrm{E}\|\xi\|^2$$

所以可得

$$E|x(t)|^2\leqslant\alpha_0^{-1}C_h\mathrm{e}^{-\varepsilon t},$$

其中 $C_h=C_1+C_2\mathrm{E}\|\xi\|^2<\infty$。即可得:

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{t}\ln\mathrm{E}|x(t)|^2\leqslant-\varepsilon$$

于是系统(1)是均方指数稳定的。

3 数值例子

考虑下面的随机时滞系统

$$\mathrm{d}x(t)=\boldsymbol{A}_1x(t-\tau)\mathrm{d}t+\boldsymbol{H}_1x(t-\tau)\mathrm{d}\omega(t)$$

其中 $\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}-1.5 & 0\\ 0.5 & -1\end{bmatrix},\boldsymbol{H}_1=\begin{bmatrix}0.5 & 1\\ -0.5 & 0.5\end{bmatrix}$,

$\lambda_1=\lambda_m(-\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}})=1.7929$, $a_1=|\boldsymbol{A}_1|,h_1=|\boldsymbol{H}_1|=\sqrt{1.3257}$,则 $\lambda_1>h_1^2$,文献[8]中

$$h_{\max}<\frac{1}{2a_1^2}\left(\sqrt{h_1^4+\frac{1}{2}(\lambda_1-h_1^2)^2}-h_1^2\right)<0.0076。$$

由定理 1 可得 $h_{max}=0.1978$，

若又 $A_1=\begin{bmatrix}-0.8 & 0\\ 0.5 & -1\end{bmatrix}$，$H_1=\begin{bmatrix}0.5 & 1\\ -0.5 & 0.5\end{bmatrix}$，则 $\lambda_1=1.2615<h_1^2=1.3257$。由文献[8]不能计算最大时滞界限，而由定理 1 可知 $h_{max}=0.1523$。

4 小结

本文主要是通过线性矩阵不等式的方法讨论了不确定随机时滞系统指数稳定性的时滞相关判据。这里需要特别指出的是公式(10)和(11)以及 4 个引理对利用系统的扩散项和处理交叉项起了重要的作用，这样得到的结果保守性要小。在李亚普诺夫稳定性理论和线性矩阵不等式的基础上得到了一个新的指数相关稳定性判据。

参考文献：

[1] Feng Z, Liu Y. Stability analysis and stabilization synthesis of stochastic large scale systems [M]. Beijing: Science Press, 1995.

[2] Kolmanovskii V B, Myshkis A. Introduction to the theory and applications of functional differential equations [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.

[3] Park P G. A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, 44: 876-877.

[4] Chen W H, Guan Z H, Lu X. Delay-dependent exponential stability of uncertain stochastic systems with multiple delays: An LMI approach [J]. Systems & Control Letters, 2005, 54: 547-555.

[5] Huang L, Deng F. Robust exponential stabilization of stochastic large scale delay systems [C]. [s. l.]: Proceedings of 2007 IEEE International Conference on Control and Automation, 2007: 107-112.

[6] Shen Y, Luo Q, Mao X. The improved LaSalle-type theorems for stochastic functional differential equations [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 318: 134-154.

[7] Liao X X, Mao X. Exponential stability of stochastic delay interval systems [J]. Systems & Control Letters, 2000, 40: 171-181.

[8] Mao X. Stochastic differential equations and applications [M]. (2nd ed.). Chichester: Horwood Publishing, 2007.

[9] Xu S, Shi P, Chu Y, et al. Robust stochastic stabilization andH1 control of uncertain neutral stochastic time-delay systems [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 314: 1-16.

[10] K Gu. An integral inequality in the stability problem of time-delay systems [C]. Sydney: Proceedings of 39th IEEE Conference on Decision and Control, 2000: 2805-2810.

[11] Yue D, Han Q L. Delay-dependent exponential stability of stochastic systems with time-varying delay nonlinearity, and Markovian switching [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50: 217-222.

[12] Li H, Chen B, Zhou Q, et al. Delay-dependent robust stability for stochastic time-delay systems with polytopic uncertainties [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2008, 18: 1482-1492.

Robust Stability of Uncertain Stochastic Systems with Time-Delays

GAO Cun-Chen, CUI Hong-Yan

(School of Mathematical Science, Ocean University of China, Qingdao 266100, China)

Abstract: This paper studies mean square robust exponentially stability of uncertain stochastic systems. With the help of linear matrix inequality theory and Lyapunov function, and taking full advantage of diffusion in the systems, an algebraic criterion of delay-dependent stability is established for uncertain stochastic time systems. The main results are illustrated by a numerical example.

Key words: stochastic systems; time delays; linear matrix inequality; delay-dependent exponentially stable

AMS Subject Classification: 93E15

责任编辑 朱宝象