

文章编号:1672-6987(2018)S1-0131-03

三重积分计算的投影法与截面法的分析

徐俊丽¹, 赵 勇²

(1. 青岛科技大学 数理学院, 山东 青岛 266061; 2. 中国海洋大学 数学科学学院, 山东 青岛 266000)

摘 要: 本工作通过计算空间非均匀密度几何体的质量, 来介绍三重积分的投影法和截面法, 有助于学生更直观的理解和掌握三重积分的计算方法。

关键词: 三重积分; 投影法; 截面法

中图分类号: O 172.2 文献标志码: A

Analysis of Projection Method and Section Method of Calculating Triple Integral

XU Junli¹, ZHAO Yong²

(1. College of Mathematics and Physics, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao 266061, China;

2. School of Mathematical Sciences, Ocean University of China, Qingdao 266000, China)

Abstract: By calculating the mass of spatial non-uniform density geometry, projection method and section-method of triple integral are introduced in this paper. In this way, students are easy to understand and grasp the computing way of triple integral.

Key words: triple integral; projection method; section method

在高等数学的教材中, 三重积分的计算是重积分问题中的一个难点, 而将三重积分化成三次积分的过程比较复杂。为了让学生更容易理解和掌握三重积分的计算, 本工作将利用微元分析法计算空间非均匀几何体的质量来介绍投影法和截面法, 从而将三重积分化为三次积分。

1 问题描述

设连续函数 $f(x, y, z) \geq 0$, 将它看作空间非均匀几何体 Ω 的密度函数, 以空间直角坐标系为例, 通过计算该空间几何体的质量来给出三重积分化为三次积分的投影法和截面法。

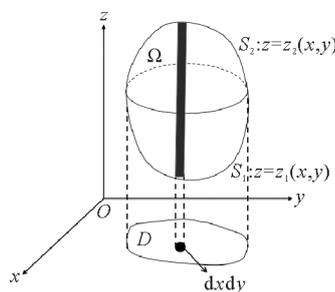
2 方法分析

2.1 投影法

投影法, 顾名思义, 就是要先找到给定几何体的投影。具体思路如下: 假设空间几何体 Ω 的边界曲面为 S , Ω 在 xoy 面上的投影区域为 D 。以区域 D 的边界曲线为准线, 作母线平行于 z 轴的投影柱面, 那么投影柱面与边界曲面 S 的交线把 S 分成上下两个曲面。其中下曲面 S_1 的方程为 $z = z_1(x, y)$, 上曲面 S_2 的方程为 $z = z_2(x, y)$, 这里的 $(x, y) \in D$, 而区域 Ω 中 z 的取值位于曲面 S_1 和 S_2 之间。于是, 空间闭区域 Ω 可表达为

$$\Omega: \begin{cases} z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), \\ (x, y) \in D. \end{cases}$$

现在将 Ω 分割成小的细长柱体微元, 如图 1 所示, 那么细小柱体微元的线密度为 $f(x, y, z) dx dy$, 故该细小柱体微元的质量元素为

图 1 空间几何体 Ω 与投影区域 D Fig. 1 Spatial geometry Ω and projection domain D

$$dm = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} [f(x, y, z) dx dy] dz = \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy.$$

因此, 以质量元素 dm 为被积表达式, 在投影区域 D

收稿日期: 2018-05-19

基金项目: 国家自然科学基金项目(41606006)。

作者简介: 徐俊丽(1983—), 女, 讲师, 博士。

上进行积分,就得到了空间几何体的质量,即

$$m = \iint_D \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right] dx dy.$$

于是,三重积分就化为先一后二的积分运算,即

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dv = \iint_D \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right] dx dy.$$

最后,根据投影区域 D 的类型,将二重积分化为二次积分。至此,用投影法完成了三重积分到三次积分的转化。

2.2 截面法

在计算一些实际问题时,有时用投影法去计算三重积分,计算量会很大,甚至会出现积分困难的情况。此时,若采用截面法,则会极大的简化计算过程。下面将介绍三重积分化为三次积分的截面法。

利用微元分析法,将空间几何体 Ω 分割成以 D_z 为底(这里区域 D_z 与 z 的取值有关), dz 为高的柱形薄片微元,如图 2 所示。那么,空间闭区域 Ω 可表达为

$$\Omega: \begin{cases} a \leq z \leq b, \\ (x,y) \in D_z. \end{cases}$$

所取的柱形薄片微元的面密度为 $f(x,y,z) dz$,故薄片微元的质量元素为

$$dm = \iint_{D_z} [f(x,y,z) dz] dx dy =$$

$$\left[\iint_{D_z} f(x,y,z) dx dy \right] dz.$$

因此,以质量元素 dm 为被积表达式,在变量 z 的积分区间 $[a,b]$ 上进行积分,最终得到几何体 Ω 的质量

$$m = \int_a^b \left[\iint_{D_z} f(x,y,z) dx dy \right] dz.$$

于是三重积分也就化成了先二后一的积分运算

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dv = \int_a^b \left[\iint_{D_z} f(x,y,z) dx dy \right] dz.$$

最后,再根据截面 D_z 的类型,将二重积分化为二次积分。至此,用截面法完成了三重积分到三次积分的转化。

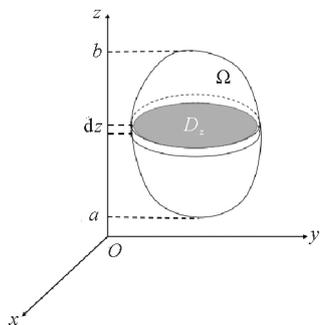


图 2 空间几何体 Ω 与截面区域 D_z

Fig. 2 Spatial geometry Ω and section domain D_z

3 计算应用

下面针对不同的三重积分问题对投影法和截面法的计算量进行比较分析。

例 1 计算 $\iiint_{\Omega} y^2 z dx dy dz$, 其中 Ω 由抛物面 $z = x^2 + y^2$ 和平面 $z = 0, z = 4$ 围成。

分析 如图 3 所示,此题中的积分区域 Ω 在 xOy 面的投影区域为以原点为圆心、半径为 2 的圆形区域,很容易用 ρ 和 θ 表示该圆域。再作一条平行于 z 轴且贯穿区域 Ω 的直线,可以得到 z 的取值范围。故优先采用投影法。

解 运用投影法

为了便于计算,现将积分区域 Ω 写成柱面坐标系下的范围: $\Omega = \{ (\rho, \theta, z) \mid 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \rho^2 \leq z \leq 4 \}$, 那么,

$$\iiint_{\Omega} y^2 z dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{\rho^2}^4 z \rho^2 \sin^2 \theta \rho dz d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_{\rho^2}^4 z dz = 16\pi.$$

为了比较两个方法的计算量大小,再采用截面法进行计算。用平行于 xOy 坐标面的平面去截区域 Ω , 所得截面是方程为 $x^2 + y^2 = z$ 的圆形区域,而 z 的取值范围位于 0 和 4 之间,此时区域 Ω 可表示为

$$\Omega = \{ (x,y,z) \mid -\sqrt{z-y^2} \leq x \leq \sqrt{z-y^2}, -\sqrt{z} \leq y \leq \sqrt{z}, 0 \leq z \leq 4 \}.$$

因此,

$$\iiint_{\Omega} y^2 z dx dy dz = \int_0^4 z dz \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} y^2 dy \int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} dx = 2 \int_0^4 z dz \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} y^2 \sqrt{z-y^2} dy.$$

显然,截面法的计算量要比投影法的计算量要大。

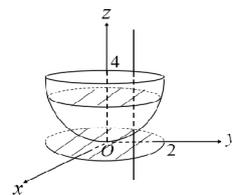


图 3 空间闭区域 Ω

Fig. 3 Spatial closed domain Ω

例 2 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是上半椭球体 $\Omega = \{ (x,y,z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, z \geq 0 \}$ 围成的空间闭区域。

分析:此题中被积函数与 x,y 无关,用平行于 xOy 坐标面的平面去截区域 Ω , 所得截面是一椭圆区域 D_z , 如图 4 所示。根据二重积分的几何意义,面积易求。故优先采用截面法。

解:空间闭区域 Ω 如图 4 所示,运用截面法。

此时区域 Ω 可表示为: $0 \leq z \leq c, D_z = \{ (x,y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{z^2}{c^2} \}$ 。由于被积函数仅与 z 有关,那么在区域 D_z 上进行二重积分计算时比较简单,可根据其几何意义直接计算 D_z 的截面积。所以,

$$\iiint_{\Omega} z dx dy dz = \int_0^c z dz \iint_{D_z} dx dy = \int_0^c z dz \cdot \pi a \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} \cdot b \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} = \frac{\pi}{4} abc^2.$$

若采用投影法,此时积分区域 Ω 可表示为

$$0 \leq z \leq c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, -b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, -a \leq x \leq a,$$

那么,

$$\iiint_{\Omega} z dx dy dz = \int_{-a}^a dx \int_{-b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}^{b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} dy \int_0^{c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} z dz,$$

可见,该题用投影法比截面法的计算量要大。

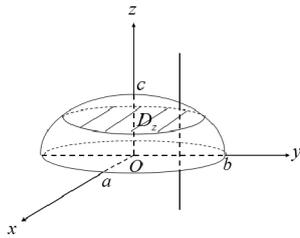


图 4 空间闭区域 Ω

Fig. 4 Spatial closed domain Ω

(上接第 126 页)

参 考 文 献

[1] 胡磊, 王学, 孟庆云, 等. 9%Cr 钢厚壁管道局部焊后热处理温度场的数值模拟[J]. 焊接学报, 2015, 36(12):13-16.
 [2] 陈宝洁. 大型圆管对接焊缝感应热处理模拟[J]. 中国海洋平台, 2013, 28(6):18-22.
 [3] 张月红. 感应加热温度场的实验与仿真研究[J]. 企业科技与发展, 2010(4):44-46.
 [4] 冯晓明. 电磁感应加热试验研究[J]. 一重技术, 2015(1):33-36.
 [5] 何建民, 罗永建. 电磁感应加热在铸钢件焊补中的应用[J]. 铸造设备与工艺, 2013(3):21-23.

(上接第 130 页)

[3] 陆治国, 祝万平, 刘捷丰, 等. 一种新型交错并联双向 DC/DC 变换器[J]. 中国电机工程学报, 2013, 22(12):39-46.
 [4] 陆治国, 刘捷丰, 林贤贞. 一种改进型两相交错并联 Boost 变换器[J]. 电机与控制学报, 2010, 14(7):48-52.
 [5] 胡雪峰, 戴国瑞, 龚春英, 等. 一种高增益低开关应力改进交错型 Boost 变换器[J]. 电工技术学报, 2014, 29(12):80-87.

4 结 语

综上所述,如果三重积分中被积函数与 x, y 无关,用平行于 xOy 坐标面的平面去截空间闭区域,所得截面面积比较容易计算,此时可以优先采用截面法。而在其它情况下,被积函数与 x, y, z 有关,一般可用投影法计算。若被积函数中含有项 $x^2 + y^2$ 或积分区域边界曲面方程中含有项 $x^2 + y^2$ 时,一般可用柱面坐标计算。如果空间闭区域为球体或是球体的一部分,被积函数具有形式 $x^2 + y^2 + z^2$ 时,通常用球坐标计算三重积分。可以发现,不论采用投影法还是截面法,要理解了这两种方法的本质,灵活使用,才能更容易的计算三重积分。

参 考 文 献

[1] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 北京:高等教育出版社, 2007:99-104.
 [2] 许绍溥. 数学分析教程[M]. 南京:南京大学出版社,1990.
 [3] 李昆,赵刚. 三重积分中两种计算方法的比较[J]. 孝感学院学报, 2010, 30(6):23-25.

(责任编辑 姜丰辉)

[6] SONG M C, MOON Y H. Coupled electromagnetic and thermal analysis of induction heating for the forging of marine crankshafts[J]. Applied Thermal Engineering, 2016, 98:98-109.
 [7] HAN Y, YU E, ZHANG H, et al. Numerical analysis on the medium-frequency induction heat treatment of welded pipe [J]. Applied Thermal Engineering, 2013, 51(1/2):212-217.
 [8] SHEN H, YAO Z Q, SHI Y J, et al. Study on temperature field induced in high frequency induction heating[J]. Acta Metallurgica Sinica, 2006, 19(3): 190-196.
 [9] 黄军, 武文斐, 王宝峰, 等. 无缝钢管淬火感应加热过程的数值模拟[J]. 钢管, 2010, 39(5):66-69.
 [10] 赵敏, 许雪峰, 陈峰. 45 钢坯锻前感应加热有限元模拟分析 [J]. 锻压装备与制造技术, 2006, 41(4): 33-36.

(责任编辑 姜丰辉)

[6] 陆治国, 田海涛, 汪渊. 一种新型的交错并联二次型 Buck 变换器[J]. 电力电子技术, 2014, 48(2):19-23.
 [7] 徐德鸿. 电力电子系统建模及控制[M]. 北京:机械工业出版社, 2005.
 [8] 张菲菲. 交错并联 Buck 变换器研究[D]. 大庆:东北石油大学, 2015:8-30.

(责任编辑 姜丰辉)