第27卷第2期 青岛科技大学学报 Vol.27 No.2
2006年4月 Journal of Qingdao University of Science and Technology Apr.2006

文章编号:1672-6987(2006)02-0182-04

时间测度上具变号系数时滞微分方程解的渐近性与振动性

朱善良[1],闫信州[2]

(1.青岛科技大学 数理系,山东 青岛 266061;2.莱阳农学院 理学院,山东 青岛 266109)

摘 要:考虑时间测度上一类时滞微分方程的振动性,建立了这类方程的解振动的充分条件,同时,讨论了该方程非振动解的渐近性质。

关键词:时间测度;振动性;渐近性;时滞

中图分类号:O175 **文献标识码**:A

Oscillation and Asymptotic Behavior of Solutions of Delay Differential Equations with Oscillatory Coefficients on Time Scales

ZHU Shan-liang[1], YAN Xin-zhou[2]

(1.Department of Mathematics and Physics,Qingdao University of Science and Technology,Qingdao 266061,China
2.College of Sciences,Laiyang Agricultural College,Oingdao 266109,China)

Abstract: In this paper,we consider the oscillation of the delay differential equations on time scales.Some sufficient conditions for the oscillation of the solution are given. And we also discuss the asymptotic behavior of solutions of the equations.

Key words: Time scale; oscillation; asymptotic behavior; delay

1988年德国数学家Hilger S介绍了测度链理论[1],这一理论统一了连续和离散的动力方程。由于其广泛的应用价值,故这一理论一出现便引起数学工作者的广泛关注。Lakshmikantham等[2]建立了测度链上动力方程的李雅普诺夫稳定性理论;Bohner和Peterson系统分析了测度链上动力方程的重要一类:时间测度上的动力方程[3],对这类方程的解的渐近性与振动性问题的研究,已有不少好的结果[4-6]。但目前大多数研究都局限于系数是定号的情形,而对系数是变号的情形,还未见报道。本文考虑时间测度上具变号系数的一阶线性时滞微分方程的振动性与渐近性,得到了若干振动性与渐近性的充分条件。

时间测度上的相关概念和性质参考文献[3,7]。本文由于只研究振动性,故假设所考虑的时间测度是无上界的,即 $\sup T=\infty$。

考虑时间测度上时滞微分方程

$$y^{\Delta}(t)+\sum_{i=1}^{m}p_i(t)y(t-\tau_i(t))=0 \tag{1}$$

这里 $t\in \mathrm{T}$, $p_i: T\to \mathrm{R}$ 是rd连续的, $i=1,2,\cdots,m$, $\tau_i: T\to \mathrm{T}$, $t-\tau_i(t)\in \mathrm{T}$, $i=1,2,\cdots,m$, $\tau_1\geqslant\tau_1(t)\geqslant\tau_2(t)\geqslant\cdots\geqslant\tau_m(t)\geqslant\tau_m>0$,其中 $t-\tau_1$, $t-\tau_m\in \mathrm{T}$,且 $t-\tau_m(t)$ 是非增的。

收稿日期:2005-10-14
作者简介:朱善良(1977~),男,助教.

条件(H):若 $p_1(t),p_2(t),\cdots,p_m(t)$ 满足

(i) 存在某个 $T_0\in\mathbb{T}$,当 $t\geqslant T_0$ 时,有 $p_1(t)\geqslant 0$, $p_1(t)+p_2(t)\geqslant 0,\cdots,p_1(t)+p_2(t)+\cdots+p_m(t)\geqslant 0$

(ii) 对于任意给定的 $T_1\in\mathbb{T}$,总有某个 $T_2\geqslant T_1(T_2\in\mathbb{T})$,使得在 $[T_2,T_2+\tau]\cap\mathbb{T}$ 上,有 $p_i(t)\geqslant 0$,$i=1,2,\cdots,m$,则称函数组 $p_1(t)$,$p_2(t),\cdots,p_m(t)$ 对数 τ 满足条件(H)。

注:①若 $T=N,t-\tau_i(t)=t-\tau_i,\tau_i\in N_0$,$i=1,2,\cdots,m$,对方程(1),已有结论见文献[8]。

②若 $T=[t_0,\infty)$ 是 R 的一个区间,$t-\tau_i(t)=t-\tau_i,i=1,2,\cdots,m$,已有结论见文献[9]。

1　主要引理

引理 1　若 $p_1(t),p_2(t),\cdots,p_m(t)$ 对数 τ_1 满足条件(H),则方程(1)的最终正解(负解) $y(t)$ 必最终不增(不减),且有

$$\sum_{i=1}^{m}p_i(t)y(t-\tau_i(t))\geqslant y(t-\tau_m(t))\sum_{i=1}^{m}p_i(t) \tag{2}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m}p_i(t)y(t-\tau_i(t))\leqslant y(t-\tau_m(t))\sum_{i=1}^{m}p_i(t)\right)$$

证明:设当 $t\geqslant T_1$ 时,$y(t-\tau_1)>0$。由条件(H)知,$\exists T_2\geqslant T_1$,使在 $[T_2,T_2+\tau_1]\cap\mathbb{T}$ 上,有 $p_i(t)\geqslant 0,i=1,2,\cdots,m$,因而在 $[T_2,T_2+\tau_1]\cap T$ 上,有

$y^{\Delta}(t)=-\sum_{i=1}^{m}p_i(t)y(t-\tau_i(t))\leqslant 0$,故在 $[T_2,T_2+\tau_1]\cap\mathbb{T}$ 上,$y(t)$ 是不增的。

下证在 $[T_2+\tau_1,T_2+\tau_1+\tau_m]\cap\mathbb{T}$ 上,$y(t)$ 也是不增的。

$\forall t\in[T_2+\tau_1,T_2+\tau_1+\tau_m]\cap\mathbb{T}$ 上,有 $t-\tau_i(t)\in[T_2,T_2+\tau_1]\cap\mathbb{T},i=1,2,\cdots,m$,则

$$y^{\Delta}(t)=-\sum_{i=1}^{m}p_i(t)y(t-\tau_i(t))\leqslant$$

$$-p_1(t)y(t-\tau_2(t))-p_2(t)y(t-\tau_2(t))-\sum_{i=3}^{m}p_i(t)y(t-\tau_i(t))\leqslant\cdots\leqslant-(p_1(t)+p_2(t)+\cdots+p_m(t))y(t-\tau_m(t))\leqslant 0$$,则在 $[T_2+\tau_1,T_2+\tau_1+\tau_m]\cap\mathbb{T}$ 上,$y(t)$ 是不增。类似地可证,在 $[T_2+\tau_1+\tau_m,T_2+\tau_1+2\tau_m]\cap\mathbb{T},\cdots,[T_2+\tau_1+k\tau_m,T_2+\tau_1+(k+1)\tau_m]\cap\mathbb{T}$,$y(t)$ 是不增的,故对 $t\geqslant T_2$,$y(t)$ 是非增的。

由上述推导过程可看出式(2)最终成立。对于 $y(t)$ 是最终负解,类似可证。

引理 2[4]　若 $p(t)\mu(t)<1$,且不等式 $y^{\Delta}(t)+p(t)y(t)\leqslant 0$ 成立,其中 $p:T\to\mathbb{R}$ 是 rd 连续的,则 $y(t)\leqslant$

$$\exp\left(\int_{t_0}^{t}\xi_{\mu(s)}(-p(s))\Delta s\right)y(t_0),t_0\in\mathbb{T}。$$

引理 3[4]　若 $p:T\to\mathbb{R}$ 是 rd 连续的,且 $p(t)\mu(t)<1$,则

$$1-\int_{t_0}^{t}p(s)\Delta s\leqslant\exp\left(\int_{t_0}^{t}\xi_{\mu(s)}(-p(s))\Delta s\right)。$$

引理 4　若 $p_1(t),p_2(t),\cdots,p_m(t)$ 对数 τ_1 满足条件(H),且存在一个正常数 d,满足:

$\sum_{i=1}^{m}\int_{t-\tau_m(t)}^{t}p_i(s)\Delta s\geqslant d>0$,$t$ 充分大,若 $y(t)$ 是方程(1)的一个最终正解,则对 $\forall t\in\mathbb{T}$,$\exists t^*\in[t-\tau_m(t),t]\cap\mathbb{T}$,使得 $\dfrac{y(t^*-\tau_m(t^*))}{y(t^*)}$ 最终有上界。

证明:由引理 1 知,对充分大 t,有 $y^{\Delta}(t)+$

$$\sum_{i=1}^{m}p_i(t)y(t-\tau_m(t))\leqslant 0, \tag{3}$$

由假设,令 $\int_{t-\tau_m(t)}^{t}\sum_{i=1}^{m}p_i(s)\Delta s=\omega(t)\geqslant d>0$,

取 $g(r)=\int_{t-\tau_m(t)}^{t}\sum_{i=1}^{m}p_i(s)\Delta s-\frac{1}{2}\omega(t)$,

$r\in[t-\tau_m(t),t]\cap\mathbb{T}$;

$$A_1=\left\{r\in[t-\tau_m(t),t]\cap\mathbb{T},g(r)\leqslant 0\right\};$$

$$A_2=\left\{r\in[t-\tau_m(t),t]\cap\mathbb{T},g(r)\geqslant 0\right\},$$

由中值定理[3]知,$\exists t^*\in[t-\tau_m(t),t]\cap\mathbb{T}$,使得

$$g(t^*)g(\sigma(t^*))\leqslant 0,且$$

$$t^*\in A_1,\sigma(t^*)\in A_2 \tag{4}$$

分两种情况讨论:

①若 $\int_{t^*}^{\sigma(t^*)}\sum_{i=1}^{m}p_i(s)\Delta s=\sum_{i=1}^{m}p_i(t^*)\mu(t^*)\geqslant$

$\frac{4}{d}$，则从 $t^* \to \sigma(t^*)$ 积分式(3)，从而

$\frac{y(t^*-\tau_m(t^*))}{y(t^*)} \leqslant \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} p_i(t^*)\mu(t^*)} \leqslant \frac{d}{4}$ 有上界。

②若 $\int_{t^*}^{\sigma(t^*)} \sum_{i=1}^{m} p_i(s)\Delta s = \sum_{i=1}^{m} p_i(t^*)\mu(t^*) < \frac{d}{4} \leqslant \frac{1}{4}\omega(t)$，

则有 $$\int_{t^*}^{t} \sum_{i=1}^{m} p_i(s)\Delta s > \frac{d}{4}, \tag{5}$$

$$\int_{t-\tau_m(t)}^{t^*} \sum_{i=1}^{m} p_i(s)\Delta s > \frac{d}{4}, \tag{6}$$

易证式(5)成立。

下证式(6)成立：

(i) 当 $\mu(t^*)=0$，即 $\sigma(t^*)=t^*$ 时，由式(4)知，$g(t^*)=0$，即

$\int_{t-\tau_m(t)}^{t^*} \sum_{i=1}^{m} p_i(s)\Delta s = \frac{1}{2}\omega(t) \geqslant \frac{1}{2}d > \frac{d}{4}$，故式(6)成立。

(ii) 当 $\mu(t^*)\neq 0$ 时，即 $\sigma(t^*)>t^*$ 时，若式(6)不成立，则

$$\int_{t^*}^{\sigma(t^*)} \sum_{i=1}^{m} p_i(s)\Delta s = \int_{t-\tau_m(t)}^{\sigma(t^*)} \sum_{i=1}^{m} p_i(s)\Delta s - \int_{t-\tau_m(t)}^{t^*} \sum_{i=1}^{m} p_i(s)\Delta s \geqslant \frac{1}{2}d - \frac{1}{4}d = \frac{1}{4}d,$$

与假设矛盾，从而式(6)成立。

从 $t-\tau_m(t) \to t^*$ 积分式(3)，且由 $y(t)$，$\tau_m(t)$ 的非增性及式(6)知，

$$y(t-\tau_m(t)) \geqslant y(t^*-\tau_m(t^*))\int_{t-\tau_m(t)}^{t^*} \sum_{i=1}^{m} p_i(s)\Delta s \geqslant \frac{d}{4}y(t^*-\tau_m(t^*))。$$

类似地，

$$y(t^*) \geqslant y(t-\tau_m(t))\int_{t^*}^{t} \sum_{i=1}^{m} p_i(s)\Delta s \geqslant \frac{d}{4}y(t-\tau_m(t)) \geqslant \frac{d^2}{16}y(t^*-\tau_m(t^*)),$$

从而 $\frac{y(t^*-\tau_m(t^*))}{y(t^*)} \leqslant \frac{16}{d^2}$，即

$\frac{y(t^*-\tau_m(t^*))}{y(t^*)}$ 也有上界，其中 t^* 与 t 有关。

由情形①、②可知，$\frac{y(t^*-\tau_m(t^*))}{y(t^*)}$ 最终有上界，其中 $t^* \in [t-\tau_m(t),t]\cap \mathbb{T}$。

2 主要结果

由引理1易知方程(1)解的渐近性质。

定理1 若 $p_1(t),p_2(t),\cdots,p_m(t)$ 对数 τ_1 满足条件(H)，则方程(1)的解或振动，或当 $t\to\infty$ 时，单调趋于某个有限常数。

定理2 若 $p_1(t),p_2(t),\cdots,p_m(t)$ 对数 τ_1 满足条件(H)，且 $\sum_{i=1}^{m}\int_{t_0}^{\infty} p_i(t)\Delta t=+\infty$，$t_0\in\mathbb{T}$，则方程(1)的一切非振动解当 $t\to\infty$ 时均趋于0。

下面讨论方程(1)的解的振动性。

定义集合：

$$E=\left\{\lambda \mid \lambda>0, 1-\lambda\sum_{i=1}^{m} p_i(t)\mu(t)>0\right\},$$

定理3 设 $p_1(t),p_2(t),\cdots,p_m(t)$ 对数 τ_1 满足条件(H)，若

$$\lim_{t_0\to\infty}\sup_{t>t_0}\sup_{\lambda\in E}\left\{\lambda\exp\left[\int_{t-\tau_m(t)}^{t}\xi_{\mu(s)}\left(-\sum_{i=1}^{m}\lambda p_i(s)\right)\times\Delta s\right]\right\}<1, \tag{7}$$

则方程(1)的一切解振动。

证明：设 $y(t)$ 是方程(1)的一个最终正解，由引理1知，$y(t)$ 最终是不增的，从而 $y^{\Delta}(t)+\sum_{i=1}^{m} p_i(t)y(t)\leqslant 0$ 最终成立。

定义集合：

$$\Lambda=\left\{\lambda \mid \lambda>0, y^{\Delta}(t)+\sum_{i=1}^{m}\lambda p_i(t)y(t)\leqslant 0\right\},$$

显然 $1\in\Lambda$，且

$$0\geqslant\int_{t}^{\sigma(t)} y^{\Delta}(s)\Delta s+\int_{t}^{\sigma(t)}\lambda\sum_{i=1}^{m} p_i(s)y(s)\Delta s = y(\sigma(t))-y(t)+\lambda\sum_{i=1}^{m} p_i(t)y(t)\mu(t) > -y(t)+\lambda\sum_{i=1}^{m} p_i(t)y(t)\mu(t),$$

从而，$\forall\lambda\in\Lambda$，有 $1-\lambda\sum_{i=1}^{m} p_i(t)\mu(t)>0$，即 $\lambda\in E$，故 $\Lambda\subset E$。

由式(7)知，$\exists T_0$ (不妨设 T_0 充分大),使得

$$g(t,\lambda)=\lambda\exp\left[\int_{t-\tau_m(t)}^{t}\xi_{\mu(s)}\left(-\sum_{i=1}^{m}\lambda p_i(s)\right)\Delta s\right]\leqslant$$

$\alpha<1, t\geqslant T_0$，

对 $\forall\lambda\in\Lambda$，由引理2知，$\exists T_1\geqslant T_0$，使当 $t\geqslant T_1$ 时,有

$$y(t)\leqslant\exp\left[\int_{t-\tau_m(t)}^{t}\xi_{\mu(s)}\left(-\sum_{i=1}^{m}\lambda p_i(s)\right)\Delta s\right]y(t-\tau_m(t))$$

,即

$$\frac{y(t-\tau_m(t))}{y(t)}\geqslant\frac{\lambda}{g(t,\lambda)}\geqslant\frac{\lambda}{\alpha}$$，因此

$$y^{\Delta}(t)+\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda}{\alpha}p_i(t)y(t)\leqslant 0,\ \frac{\lambda}{\alpha}\in\Lambda 。$$

依次类推 $\forall k\in N_0$，有 $\lambda\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1}\in\Lambda$，从而 $\exists T_k\in T$，使得 $\forall t\geqslant T_k$，有 $\frac{y(t-\tau_m(t))}{y(t)}\geqslant$

$$\lambda\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k},\tag{8}$$

由引理3,有 $1-\int_{t-\tau_m(t)}^{t}\sum_{i=1}^{m}p_i(s)\Delta s\leqslant$

$$\exp\left(\int_{t-\tau_m(t)}^{t}\xi_{\mu(s)}\left(-\sum_{i=1}^{m}p_i(s)\right)\Delta s\right),$$

令 $\lambda=1$，有

$$\exp\left(\int_{t-\tau_m(t)}^{t}\xi_{\mu(s)}\left(-\sum_{i=1}^{m}p_i(s)\right)\Delta s\right)\leqslant\alpha,$$

因此，$$\int_{t-\tau_m(t)}^{t}\sum_{i=1}^{m}p_i(s)\Delta s\geqslant 1-\alpha>0\tag{9}$$

由式(8)、式(9)及引理4知，

$\forall t\geqslant T_k$，$\exists t^*\in[t-\tau_m(t),t]\cap T$，使得 $\frac{y(t^*-\tau_m(t^*))}{y(t^*)}\geqslant\lambda\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k}$，由于 $\frac{1}{\alpha}>1$，故可取 k 充分大,使得 $\lambda\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k}$ 无界,这与引理3的结论矛盾,定理证毕。

注:①若 $T=N, t-\tau_i(t)=t-\tau_i, \tau_i\in N_0$，$i=1,2,\cdots,m$，由式(7)知,

$$\lim_{n_0\to\infty}\sup_{n>n_0}\sup_{\lambda\in E}\left\{\lambda\prod_{j=n-\tau_m}^{n-1}\left(1-\lambda\sum_{i=1}^{m}p_{ij}\right)\right\}<1,$$

其中，$E=\left\{\lambda\mid\lambda>0, 1-\lambda\sum_{i=1}^{m}p_{ij}>0\right\}$，与文献[8]的结论是一致的。

②若 $T=R, t-\tau_i(t)=t-\tau_i, i=1,2,\cdots,m$，由式(7)知,

$$\lim_{t_0\to\infty}\sup_{t>t_0}\sup_{\lambda\in E}\left\{\lambda\exp\left[\int_{t-\tau_m}^{t}\left(-\sum_{i=1}^{m}\lambda p_i(s)\right)ds\right]\right\}<1,$$

其中 $E=\mathfrak{R}^{+}$，与已知结论一致。

参 考 文 献

[1] Hilger S. Ein Mβkettenkalkü mit Anwendung auf Zentrums-mannigfaltigkeiten[C]. PhD thesis: Universität Würzburg, 1988.

[2] Kaymakcalan B, Lakshmikantham V, Sivasundaram S. Dunamic Systems on Measure Chains[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1996.

[3] Martin Boher, Allan Peterson. Dynamic Equations on Time Scales, An Introduction with Applications [M]. Boston: Birkhauser, 2001.

[4] Zhang B G, Deng Xinghua. Oscillation of delay differential equations on Time Scales[J]. Math Comput Modelling, 2002, 36: 1307-1318.

[5] Zhang B G, Zhu Shanliang. Oscillation of second order nonlinear delay dynamic equations on Time Scales[J]. Computers Mathematics with Applications, 2005, 49: 599-609.

[6] Saker S H. Oscillation of nonlinear dymamic equations on Time Scales[J]. Appl Math Comprt, 2004, 148(1): 81-91.

[7] 张炳根. 测度链上微分方程的进展[J]. 中国海洋大学学报, 2004, 34(5): 907-912.

[8] Lall B S, Zhang B G. Oscillation of difference equations[J]. Collquium Mathematicum, 1993, Lxv: 25-32.

[9] 陈永劭. 具变号系数的一阶线性泛函微分方程的解的渐近性与振动性[J]. 应用数学学报, 1989, 12: 96-104.