文章编号：1671－7996(2008)02－0044－03

# 时间测度上一类超前型微分方程解的振动性

吴　玮[1]　朱善良[2]　苏鸿雁[2]

(1. 青岛远洋船员学院管理系，山东　青岛 266071；2. 青岛科技大学数理学院，山东　青岛 266061)

**提　要**：考虑时间测度上一阶线性超前型微分方程解的振动性，我们建立了这类方程的解振动的充分条件，所得结论包含了微分方程和差分方程的有关结果，同时，我们的结论也包括了更多种情况。

**关键词**：时间测度　振动性　微分方程　超前型

**中图分类号**：O175　　　**文献标识码**：A

德国数学家 Stfan Hilger在 1990年发表了测度链 (Measure Chain)分析——一个连续与离散计算的统一方法[1]，此文发表后受到数学工作者的广泛关注。Lakshmikantham 等 1996年出版的著作[2]建立了测度链上动力方程的李雅普诺夫稳定性理论；Bohner和 Peterson系统分析了测度链上动力方程的重要一类：时间测度上的动力方程[3]，对这类方程的解的振动性问题的研究，已有不少好的结果[4－6]。但大多数研究都局限于具有滞后量的情形，而对具有超前量的情形，还未见报道。本文考虑时间测度上一阶线性超前型微分方程解的振动性，得到了若干振动性与渐近性的充分条件，这些结果包括了连续和离散情况下的已有结果。

## 1　预备知识

实数的任意非空闭子集叫时间测度 (Time Scale)，例如：R，Z，N (自然数集合)，$N_0$ (非负整数集合)都是时间测度的例子。在本文，由于只研究振动性，故假设所考虑的时间测度是无上界的，即 $\sup T=\infty$。时间测度上的相关概念和性质参考文献 [3，6]。

考虑时间测度上超前型微分方程

$$x^{\Delta}(t)-\sum_{i=1}^{m}p_i(t)x(t+\tau_i(t))=0 \qquad (1)$$

其中 $\in T$。

对系数 $p_i(t)$和超前量 $\tau_i(t)$作如下假设：

条件 (H)：$p_i: T\to R$是 rd连续的，且 $p_i(t)\geqslant 0$，$i=1,2,...,m$；$\tau_i: T\to T$，$t+\tau_i(t)\in T$，且 $t+\tau_i(t)\geqslant\sigma(t)\geqslant t$，$\tau_i(t)$是一致有界的，即 $\tau_i(t)\leqslant\tau$，$i=1,2,...,m$。

称 $x=x(t)$是方程 (1)的一个解，若 $x$是一个实值函数，且对 $t\geqslant t_0\geqslant a$满足方程 (1)，这里 $t_0\geqslant a>0$都是常数。方程 (1)的解 $x$称为振动的，若它既不是最终正的，也不是最终负的，否则，它是非振动的。方程 (1)称为振动的，若它的所有解都是振动的。只考虑方程 (1)满足下列条件的解 $x$：$x$定义在 $[t_x,\infty)$上且对任意 $t_0\geqslant t_x$，$\sup\{|x(t)|: t>t_0\}>0$。

引理[3]　设 $f: R\to R$是连续可导的，$g: T\to R$是 Δ(Delta)可导的，则 $f\circ g: T\to R$，是 Δ可导的，且

$$(f\circ g)^{\Delta}(t)=\left\{\int_0^1 f'(g(t)+h\mu(t)g^{\Delta}(t))dh\right\}g^{\Delta}(t)$$

## 2　主要结果

由本文的条件 (H)和引理，我们得到方程 (1)的解振动的充分条件。

定理　若条件 (H)成立，且

$$\lim_{t\to\infty}\inf\left\{\inf_{\lambda>0}\sum_{i=1}^{m}p_i(t)\exp(\lambda\tau_i(t))\right\}>1 \qquad (2)$$

收稿日期：2008－06－02

第一作者简介：吴玮 (1970－　)，女，副教授

则方程(1)的一切解是振动的。

证明:不妨设方程(1)有一最终正解 $x(t)$,即 $\exists T_0 \in T$,当 $t \geqslant T_0$ 时,$x^{\Delta}(T) \geqslant 0$,$x(t) > 0$。

令 $\lambda_0(t) = \dfrac{x^{\Delta}(t)}{x(t)}$,$\forall t \geqslant T_0$ (3)

$f(t) = \ln t \in C^1(R^+, R)$,

$g(t) = x(t) \in C^1_{rd}(T, R^+)$。

由引理知,$(f \circ g)(t) = \ln(x(t))$ 是 $\Delta$ 可导的,且 $(f \circ g)^{\Delta}(t) = (\ln(x(t)))^{\Delta}$

$$= \left\{\int_0^1 f'(g(t)) + h\mu(t) g^{\Delta}(t)\, dh\right\} g^{\Delta}(t)$$

$$= \left\{\int_0^1 \frac{1}{x(t) + h\mu(t) x^{\Delta}(t)}\, dh\right\} x^{\Delta}(t) \geqslant \frac{x^{\Delta}(t)}{x(t)}。 \quad (4)$$

从 $t$ 到 $t + \tau_i(t)$ 积分(3)式得

$$\int_t^{t+\tau_i(t)} \frac{x^{\Delta}(s)}{x(s)} \Delta s = \int_t^{t+\tau_i(t)} \lambda_0(s) \Delta s$$

利用不等式(4)上式变为,

$$\int_t^{t+\tau_i(t)} (\ln(x(s)))^{\Delta} \Delta s \geqslant \int_t^{t+\tau_i(t)} \lambda_0(s) \Delta s$$

即 $\dfrac{x(t+\tau_i(t))}{x(t)} \geqslant \exp\left\{\int_t^{t+\tau_i(t)} \lambda_0 \Delta s\right\}$, (5)

由方程(1),$\lambda_0(t)$ 的定义及不等式(5)可得

$$\lambda_0(t) \geqslant \sum_{i=1}^m p_i(t) \exp\left(\int_t^{t+\tau_i(t)} \lambda_0(s) \Delta s\right)。 \quad (6)$$

定义集合

$\Omega = \left\{\lambda \in C_{rd}\left([T_0, +\infty), R\right), \lambda(t) \geqslant 0, t \geqslant T_0\right\}$,

在 $\Omega$ 定义映射 $S$:

$(S\lambda)(t) = \sum_{i=1}^m p_i(t) \exp\left\{\int_t^{t+\tau_i(t)} \lambda(s) \Delta s\right\}$,$t \geqslant T_0$,

易知下列结论成立:

(i) $(S\lambda)(t) \in C_{rd}$,$(S\lambda)(t) \geqslant 0$,$t \geqslant T_0$,即 $S\Omega \subset \Omega$;

(ii) $\forall \lambda_1(t) \geqslant \lambda_2(t) \geqslant 0$,$t \geqslant T_0$,有 $(S\lambda_1)(t) \geqslant (S\lambda_2)(t)$,$\forall t \geqslant T_0$,

利用(i),(ii),不等式(6)可变为:$\lambda_0(t) \geqslant (S\lambda_0)(t)$。 (7)

由条件(2)知,$\exists c > 1$,使

$$\inf_{\lambda > 0}\left\{\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^m p_i(t) \exp(\lambda \tau_i(t))\right\} \geqslant c。 \quad (8)$$

特别地,利用条件(H),当 $\lambda = 1$ 时,对 $\forall t \geqslant T_0$,有

$$c \leqslant \sum_{i=1}^m p_i(t) \exp(\tau_i(t)) \leqslant \sum_{i=1}^m p_i(t) e^{\tau},$$

令 $b = \dfrac{c}{e^{\tau}} > 0$ ($b$ 为常数),则 $\forall t \geqslant T_0$,有

$$\sum_{i=1}^m p_i(t) \geqslant b \quad (9)$$

由不等式(7)、(9)可知,

$\lambda_0(t) \geqslant b$ $\forall t \geqslant T_0$, (10)

利用不等式(7)、(8)、(10),有

$\lambda_0(t) \geqslant (S\lambda_0)(t) \geqslant S(b)$

$= \sum_{i=1}^m p_i(t) \exp(b\tau_i(t)) \geqslant bc$ $\forall t \geqslant T_0$,以此类推,对 $\forall t \geqslant T_0$,有 $\lambda_0(t) \geqslant S(bc) \geqslant bc^2, \cdots$,$\lambda_0(t) \geqslant bc^k$,$\forall k \in N$,当 $k \to \infty$ 时,有 $\lambda_0(t) \to \infty$,这与 $\lambda_0(t)$ 的定义矛盾,从而方程(1)无最终正解,类似地,可证方程(1)也无最终负解,故方程(1)的一切解是振动的。

推论 若条件(H)成立,且

$\liminf_{t \to \infty}\left\{\sum_{i=1}^m p_i(t) \tau_i(t)\right\} > \dfrac{1}{e}$,则方程(1)的一切解是振动的。

注 (i)当 $T = R$ 时,定理的条件成为文献[7]中的条件;

(ii)当 $T = R$ 时,推论与文献[8]的定理 7是一致的。

## 参考文献:


[1] Hilger S. Analysis on measure chains—unified approach to continuous and discrete calculus [J]. Results Math, 1990, 18: 18—56.

[2] Kaymakcalan B, Lakshmikantham V, Sivasundaram S. Dunamic Systems on Measure Chains [M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1996.

[3] Martin Boher, Allan Peterson. Dynamic Equations on Time Scales An Introduction with Applications [M]. Boston: Birkhauser, 2001.

[4] Zhang B G, Zhu Shanliang. Oscillation of second order nonlinear delay dynamic equations on Time Scales[J]. Computers Math. Applic, 49(2005): 599—609.

[5] 朱善良,闫信州. 时间测度上具变号系数时滞微分方程解的渐近性与振动性[J]. 青岛科技大学学报. 2006, 27(2): 182—185.

[6] 张炳根. 测度链上微分方程的进展. [J]. 中国海洋大学学报; 34(5): 2004, 907—912.

[7] Erbe L. H., Qingkai Kong and B. G. Zhang. Oscillation Theory for Functional Differential Equations[M]. New York: Marcel Dekker, 1995.

[8]陈永劭. 具变号系数的一阶线性泛函微分方程的解的渐近性与振动性. [J]. 应用数学学报，12(1989)，96－104.

# Oscillation of Solutions of a Class of Differential Equations of Advanced Type on Time Scales

WU Wei[1]　ZHU Shan－liang[2]　SU Hong－Yan[2]

(1. Department of Management, Qingdao Ocean Shipping Mariners College, Qingdao 266071, China;
2. College of Mathematics and Physics, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao 266061, China)

Abstract: In this paper we consider the oscillation of solutions of first order linear differential equations of advanced type on time scales. Some sufficient conditions for the oscillation of the solution are given. In some sense our results include the some well known results of the differential equation and difference equation. And the results include much more general results.

Keywords: time scale; oscillation; differential equation; advanced type

(上接第 10页)

[9] Wanigasekara NR, Zeng YQ, and Yan ZZ. Real－time Image mosaicing for multipul live streams. Journal of Image and Graphics. NGIG'2003: 142－148

[10] Wanigasekara NR. 多组视频流的实时图像拼接[D]. 上海大学硕士学位论文. 2004;

[11] The official ActivePerl homepage. http://www.activeperl.com

# The Design and Development of an Image Mosaicing Web Site

ZHANG Meng[1]　XU Jun[2]　KONG Xiang－feng[1]

(1. Qingdao Ocean Shipping Mariners College, Qingdao 266071, China;
2. College of Information Science and Engineering, Qingdao Agricultural University, Qingdao 266109, China)

Abstract: This paper describes a web site for image mosaicing service based on B/S mode. Client user can mosaic images though web browser, e. g. IE. It's tested in LAN. The implementation examples and experiment results as well as discuss are provided finally.

Keywords: web service; image mosaicing; Browser/Server