第 9卷　第 13期　2009年 7月　　科 学 技 术 与 工 程　　Vol.9　No.13　July 2009
1671-1819(2009)13-3731-02　　Science Technology and Engineering　　? 2009　Sci. Tech. Engng.

时间标度上一类动力方程解的振动准则

朱善良
(青岛科技大学数理学院,青岛 266061)

摘　要　考虑时间标度上一阶线性动力方程解的振动性,建立了这类方程的解振动的充分条件,所得结论包含有关成果。

关键词　时间标度　　振动性　　动力方程
中图法分类号　O175.15;　　　文献标志码　A

时间标度最初是由 Stfan Hilger[1]提出的,目的是把连续和离散统一起来进行讨论,并在此基础上推广到更一般的情形。这一理论近几年得到了广泛关注。Bohner和 Peterson[2]系统分析了时间标度上的动力方程。本文考虑时间标度上一阶线性动力方程解的振动性,得到了方程振动的充分条件,这些结果包括了连续和离散情况下的已有结果。

1　主要引理

由于只研究振动性,故假设所考虑的时间标度 T是无上界的,即 $\sup T=\infty$。时间标度上的相关概念和性质参考文献[2,3]。

考虑时间标度上超前型动力方程

$$x^{\Delta}(t)-\sum_{i=1}^{m}p_i(t)x(t+\tau_i(t))=0 \qquad (1)$$

对系数 $p_i(t)$和超前量 $\tau_i(t)$作如下假设:

条件(H): $p_i: T\to R$是 rd连续的,且 $p_i(t)\geqslant 0$, $i=1,2,\cdots,m$; $\tau_i: T\to T$, $t+\tau_i(t)\in T$,且 $t+\tau_i(t)\geqslant\sigma(t)\geqslant t$, $\tau_i(t)$是一致有界的,即 $\tau_i(t)\leqslant\tau$, $i=1,2,\cdots,m$。

引理　设 $f: R\to R$是连续可导的, $g: T\to R$是 Δ(Delta)可导的,则 $f\circ g: T\to R$,是 Δ可导的,且 $(f\circ g)^{\Delta}(t)=\left\{\int_0^1 f'(g(t)+h\mu(t)g^{\Delta}(t))dh\right\}g^{\Delta}(t)$。

此结论的证明与文献[2]的相关定理类似。

2　结果

由条件(H)和引理,得到方程(1)的解振动的充分条件。

定理　若条件(H)成立,且

$$\liminf_{t\to\infty}\left\{\inf_{\lambda>0}\sum_{i=1}^{m}p_i(t)\exp(\lambda\tau_i(t))\right\}>1 \qquad (2)$$

则方程(1)的一切解是振动的。

证明:不妨设方程(1)有一最终正解 $x(t)$,即 $\exists T_0\in T$,当 $t\geqslant T_0$时, $x^{\Delta}(t)\geqslant 0$, $x(t)>0$。令

$$\lambda_0(t)=\frac{x^{\Delta}(t)}{x(t)},\ \forall t\geqslant T_0, \qquad (3)$$

取 $f(t)=\ln t\in C^1(R^+,R)$, $g(t)=x(t)\in C^1_{rd}(T,R^+)$。

由引理知, $(f\circ g)(t)=\ln(x(t))$是 Δ可导的,且

$$(f\circ g)^{\Delta}(t)=(\ln(x(t)))^{\Delta}=\left\{\int_0^1 f'(g(t)+h\mu(t)g^{\Delta}(t))dh\right\}g^{\Delta}(t)=\left\{\int_0^1\frac{1}{x(t)+h\mu(t)x^{\Delta}(t)}dh\right\}x^{\Delta}(t)\geqslant\frac{x^{\Delta}(t)}{x(t)} \qquad (4)$$

从 t到 $t+\tau_i(t)$积分(3)式得

$$\int_t^{t+\tau_i(t)}\frac{x^{\Delta}(s)}{x(s)}\Delta s=\int_t^{t+\tau_i(t)}\lambda_0(s)\Delta s$$

2009年 3月 27日收到
作者简介:朱善良(1977—),男,讲师,研究方向:微分方程定性理论,E-mail: zhushanliang77@163.com。

由(4)式得 $\int_t^{t+\tau_i(t)} (\ln(x(s)))^{\Delta}\Delta s \geqslant \int_t^{t+\tau_i(t)} \lambda_0(s)\Delta s$

即
$$\frac{x(t+\tau_i(t))}{x(t)} \geqslant \exp\left\{\int_t^{t+\tau_i(t)} \lambda_0(s)\Delta s\right\} \qquad (5)$$
由方程(1)，$\lambda_0(t)$的定义及(5)式得
$$\lambda_0(t) \geqslant \sum_{i=1}^{m} p_i(t)\exp\left\{\int_t^{t+\tau_i(t)} \lambda_0(s)\Delta s\right\} \qquad (6)$$

定义集合 $\Omega=\{\lambda\in C_{rd}([T_0,+\infty),R),\lambda(t)\geqslant 0,\ t\geqslant T_0\}$，在 Ω 定义映射 S：$(S\lambda)(t)=\sum_{i=1}^{m} p_i(t)\exp\left\{\int_t^{t+\tau_i(t)} \lambda(s)\Delta s\right\}$，$t\geqslant T_0$，易知下列结论成立：

(ⅰ) $(S\lambda)(t)\in C_{rd}$，$(S\lambda)(t)\geqslant 0$，$t\geqslant T_0$，即 $S\Omega\subset\Omega$；

(ⅱ) $\forall\ \lambda_1(t)\geqslant\lambda_2(t)\geqslant 0$，$t\geqslant T_0$，有 $(S\lambda_1)(t)\geqslant(S\lambda_2)(t)$，$\forall\ t\geqslant T_0$，

利用(ⅰ)，(ⅱ)，(6)式变为：$\lambda_0(t)\geqslant(S\lambda_0)(t)$ (7)

由条件(2)知，$\exists\ c>1$，使
$$\inf_{\lambda>0}\left\{\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{m} p_i(t)\exp(\lambda\tau_i(t))\right\}\geqslant c \qquad (8)$$
特别地，利用条件(H)，当 $\lambda=1$时，对 $\forall\ t\geqslant T_0$，有
$$c\leqslant\sum_{i=1}^{m} p_i(t)\exp(\tau_i(t))\leqslant\sum_{i=1}^{m} p_i(t)e^{\tau},$$
令 $b=\frac{c}{e^{\tau}}>0$（b为常数），则 $\forall\ t\geqslant T_0$，有
$$\sum_{i=1}^{m} p_i(t)\geqslant b \qquad (9)$$
由(7)式、(9)式可知，$\lambda_0(t)\geqslant b\ \ \forall\ t\geqslant T_0$ (10)

利用(7)式、(8)式、(10)式，有

$\lambda_0(t)\geqslant(S\lambda_0)(t)\geqslant S(b)=\sum_{i=1}^{m} p_i(t)\exp(b\tau_i(t))\geqslant bc\ \ \forall\ t\geqslant T_0$，

以此类推，对 $\forall\ t\geqslant T_0$，有 $\lambda_0(t)\geqslant S(bc)\geqslant bc^2,\cdots,\lambda_0(t)\geqslant bc^k$，$\forall\ k\in N$，当 $k\to\infty$时，有 $\lambda_0(t)\to\infty$，这与 $\lambda_0(t)$的定义矛盾，从而方程(1)无最终正解，类似地，可证方程(1)也无最终负解，故方程(1)的一切解是振动的。

推论 若条件(H)成立，且 $\liminf_{t\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{m} p_i(t)\tau_i(t)\right\}>\frac{1}{e}$，则方程(1)的一切解是振动的。

注(ⅰ)当 $T=R$时，令 $p_i(t)=q_i(t)$，则本文定理的条件是文献[4]中定理3的条件：$\liminf_{t\to\infty}\left\{\inf_{\lambda>0}\sum_{i=1}^{m} q_i(t)\exp(\lambda\tau_i(t))\right\}>1$（文献[4]中取 $p_i(t)=0$，$\sigma_i(t)=-\tau_i(t)$）；

(ⅱ)当 $T=R$时，推论就是文献[5]的定理7。

参 考 文 献

1 Hilger S. Analysis on measure chains—unified approach to continuous and discrete calculus. Results Math, 1990; 18: 18—56

2 Boher M, Peterson A. Dynamic equations on time scales: an introduction with applications. Boston: Birkhauser, 2001

3 张炳根. 测度链上微分方程的进展. 中国海洋大学学报，2004; 34(5): 907—912

4 王侃民，周 军. 具有多变时滞中立型微分方程的振动性. 高校应用数学学报A辑，2004; 19(1): 31—40

5 陈永劭. 具变号系数的一阶线性泛函微分方程的解的渐近性与振动性. 应用数学学报，1989; 2: 96—104

Oscillation Criteria of Solutions of a Class of Dynamic Equations on Time Scales

ZHU Shan-liang

(College of Mathematics and Physics, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao 266061, P.R.China)

[Abstract] The oscillation of solutions of first order linear dynamic equations is considered on time scales. Some sufficient conditions for the oscillation of the solution are given. Results include the some well known results of the differential equation and difference equation. And the results include much more general results.

[Key words] time scale oscillation dynamic equation