

文章编号:1672-6987(2011)05-0534-04

时间尺度上高阶带强迫项中立型 动力方程正解的存在性

朱善良

(青岛科技大学 数理学院, 山东 青岛 266061)

摘要: 借助时间尺度上的有关理论和 Banach 压缩映射原理, 研究一类较为广泛的时间尺度上高阶带强迫项中立型动力方程正解的存在性。建立该类方程正解存在的几个新的充分条件, 并给出一个例子验证所得结果。

关键词: 动力方程; 时间尺度; 正解; 中立型

中图分类号: O 175 **文献标志码:** A

Existence of Positive Solutions of Higher Order Neutral Dynamic Equations with a Forced Term on Time Scales

ZHU Shan-liang

(College of Mathematics and Physics, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao 266061, China)

Abstract: By means of the theory on time scales and Banach contraction principle, the author considers the existence of positive solutions of generalized forced higher-order neutral dynamic equation on time scales and establishes some new sufficient conditions for the existence of positive solutions. An example is given to illustrate the results.

Key words: dynamic equation; time scales; positive solution; neutral

时间尺度上的微积分理论由德国数学家 Higer^[1]创立。关于时间尺度上的基本理论见专著^[2]和综述文献^[3]。由于其广泛的应用性, 近年来, 时间尺度上动力方程振动性和非振动性的研究十分活跃, 如文献^[4-15]。但以上文献主要研究一阶、二阶动力方程振动性和非振动性, 而对于高阶带强迫项非线性中立型动力方程正解的存在性, 还未见到任何公开结果。为此, 本文进行讨论。

1 预备知识

研究下列一类形式非常广泛的时间尺度上高阶带强迫项中立型动力方程

$$[x(t) + p(t)x(\tau(t))]^{\Delta^m} + f(t, x(r(t))) = q(t), \quad (1)$$

这里 $\sup T = \infty, t \in [T, \infty)_T, m \in N, p, q \in C_{rd}([t_0, \infty)_T, R), \tau, r \in C([t_0, \infty)_T, T)$, 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = +\infty$ 。并且假设条件(H)成立:

$f \in C(T \times R, R), xf(t, x) \geq 0, (x \neq 0), f$ 关于 x 是单调非减的, 且满足 Lipschitz 条件: 存在常数 $\alpha > 0$ 使得对于任意的 $t \geq t_0, 0 \leq x, y \leq \alpha$, 总有

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L(t) |x - y|,$$

其中 $L(t) \in C_{rd}(T, T)$ 。

针对中立项系数的不同范围, 得出方程(1)存在非振动解的充分条件。考虑下面 5 种情况:

(i) 存在常数 $p \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得 $|p(t)| \leq$

收稿日期: 2011-05-10

作者简介: 朱善良(1977—), 男, 讲师。

$1 - p, t \geq t_0$;

(ii) 存在常数 $p \in (-1, 0)$, 使得 $p \leq p(t) \leq 0, t \geq t_0$;

(iii) 存在常数 $p_1, p_2 \in (-\infty, -1)$, 使得 $p_1 \leq p(t) \leq p_2, t \geq t_0$;

(iv) 存在常数 $p \in (0, 1)$, 使得 $0 < p(t) \leq p, t \geq t_0$;

(v) 存在常数 $p_1, p_2 \in (1, +\infty)$, 使得 $p_1 \leq p(t) \leq p_2, t \geq t_0$.

2 主要结果

为了证明的需要, 给出下述符号和引理。

令 BC 是定义在 $[t_0, +\infty)$ 上的具备上确界模 $\|x\| = \sup_{t \geq t_0} |x(t)|$ 的所有有界函数 $x(t), t \geq t_0$ 的 Banach 空间。假设 $k \in N, s, t \in T^k$ 定义函数序列 $g_k(s, t), k = 1, 2, \dots$, 如下:

$$g_0(s, t) \equiv 1, \quad g_{k+1}(s, t) = \int_t^s g_k(\sigma(u), t) \Delta u.$$

引理 1^[6] 假设 s 是固定的, 令 $g_t^\Delta(s, t)$ 是函数 $g_k(s, t)$ 关于变量 t 的导数, 则

$$g_t^\Delta(s, t) = -g_{k-1}(s, t), \quad k \in N, t \in T^k.$$

定理 1 若条件(H)和(i)成立, 且

$$\int_{t_0}^\infty g_{m-1}(\sigma(s), 0)L(s)\Delta s < \infty \quad (2)$$

和

$$\int_{t_0}^\infty g_{m-1}(\sigma(s), 0) |q(s)| \Delta s < \infty \quad (3)$$

成立, 则方程(1)存在一最终正解。

证明 对某一常数 $d \neq 0$, 选择 $d_1 > 0, c_1 > 0$, 使得 $0 < d_1 < (2p - 1) |d|$ 和 $d_1 + (1 - p) |d| < c_1 < p |d|$, 令 $c = \min\{c_1 - d_1 - (1 - p) |d|, p |d| - c_1, \frac{p}{2} \alpha\}$ 。由条件(H), 式(2)和(3)可知, 存在 $t \geq t_0$ 充分大, 使得 $t \geq t_1$ 时, $\tau(t), r(t) \geq t_0$, 且有

$$\int_{t_0}^\infty g_{m-1}(\sigma(s), 0)[\alpha L(s) + |q(s)|] \Delta s \leq c \quad (4)$$

成立。构造集合

$$\Omega = \{x \in BC : d_1 \leq x(t) \leq |d|, \quad t \geq t_0\}, \quad (5)$$

则 Ω 是空间 BC 的一个有界闭凸子集。定义 $\Gamma: \Omega \rightarrow BC$ 如下:

$$(\Gamma x)(t) = \begin{cases} c_1 - p(t)x(\tau(t)) + (-1)^{m-1} \int_t^\infty g_{m-1}(\sigma(s), t)[f(s, x(r(s))) - q(s)] \Delta s, & t \geq t_1, \\ (\Gamma x)(t_1), & t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

对于任意的 $x \in \Omega, t \geq t_0$, 由条件(H), 式(4)和(5)得,

$$\begin{aligned} (\Gamma x)(t) &\geq c_1 - p(t)x(\tau(t)) - \int_t^\infty g_{m-1}(\sigma(s), t)[f(s, x(r(s))) - q(s)] \Delta s \geq \\ &c_1 - |p(t)|x(\tau(t)) - \int_t^\infty g_{m-1}(\sigma(s), 0)[\alpha L(s) + |q(s)|] \Delta s \geq \\ &c_1 - (1 - p) |d| - [c_1 - d_1 - (1 - p) |d|] = d_1, \end{aligned}$$

且有

$$\begin{aligned} (\Gamma x)(t) &\leq c_1 + |p(t)|x(\tau(t)) + \int_t^\infty g_{m-1}(\sigma(s), t)[f(s, x(r(s))) - q(s)] \Delta s \leq \\ &c_1 + (1 - p) |d| + \int_t^\infty g_{m-1}(\sigma(s), 0)[\alpha L(s) + |q(s)|] \Delta s \leq \\ &c_1 + (1 - p) |d| + p |d| - c_1 = |d|. \end{aligned}$$

所以当 $t \geq t_0$ 时, $d_1 \leq (\Gamma x)(t) \leq p |d|$, 即 $\Gamma \Omega \subseteq \Omega$ 。

下面证明 Γ 是 Ω 上的压缩映射。

事实上, 对于任意的 $x, y \in \Omega, t \geq t_1$, 由条件(H), 式(4)和(5)得,

$$\begin{aligned} \|\Gamma x - \Gamma y\| &\leq |p(t)| |x(\tau(t)) - y(\tau(t))| + \int_t^\infty g_{m-1}(\sigma(s), t) |f(s, x(r(s))) - f(s, y(r(s)))| \Delta s \leq \\ &(1 - p) \|x - y\| + \int_t^\infty g_{m-1}(\sigma(s), 0)L(s) \|x - y\| \Delta s \leq \\ &(1 - p + \frac{p}{2}) \|x - y\| = (1 - \frac{p}{2}) \|x - y\|. \end{aligned}$$

因为 $0 < 1 - \frac{p}{2} < 1$, 所以 Γ 是压缩映射。所以存在一个不动点 $x \in \Omega$ 使得 $\Gamma x = x$ 。由引理 1, 容易证明 $x(t)$ 是方程(1)的一个最终正解。定理证毕。

定理 2 假设条件(H)、(ii)和式(2)、(3)成立, 则方程(1)存在一最终正解。

证明 令 $c = \min\{\frac{1+p}{3}, \frac{\alpha(1+p)}{2}\}$ 。由条件(H), 式(2)和(3)可知, 存在 $t \geq t_0$ 充分大, 使得 $t \geq t_1$ 时, $\tau(t), r(t) \geq t_0$, 且有

$$\int_{t_1}^\infty g_{m-1}(\sigma(s), 0)[\alpha L(s) + |q(s)|] \Delta s \leq c$$

成立.构造空间 BC 的一个有界闭凸子集 Ω :

$$\Omega = \{x \in BC : \frac{2}{3}(1+p) \leq x(t) \leq \frac{4}{3}, t \geq t_0\}.$$

定义 $\Gamma: \Omega \rightarrow BC$ 如下:

$$(\Gamma x)(t) = \begin{cases} 1+p-p(t)x(\tau(t)) + \\ (-1)^{m-1} \int_t^\infty g_{m-1}(\sigma(s),t)[f(s,x(r(s))) - \\ q(s)]\Delta s, \quad t \geq t_1, \\ (\Gamma x)(t_1), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

余下的证明类似于定理 1,因此省略.定理证毕.

定理 3 假设条件(H)、(iii)和式(2)、(3)成立,且 τ 具有反函数 $\tau^{-1} \in C(T, T)$,则方程(1)存在一最终正解.

证明 选择常数 $M_1 > 0, M_2 > 0, \beta > 0$,使得 $-p_1 M_1 < \beta(-p_2 - 1)M_2$,

令 $c = \min\{\frac{\beta + p_1 M_1}{p_1} p_2, (-1 - p_2)M_2 - \beta, -\frac{1 + p_2}{2} \alpha\}$,由条件(H),式(2)和(3)可知,存在

$t_1 \geq t_0$ 充分大,使得 $t \geq t_1$ 时, $\tau^{-1}(r(t)) \geq t_0$,且有

$$\int_{\tau^{-1}(t)}^\infty g_{m-1}(\sigma(s),0)[aL(s) + |q(s)|]\Delta s \leq c$$

成立.构造集合

$$\Omega = \{x \in BC : M_1 \leq x(t) \leq M_2, t \geq t_0\},$$

则 Ω 是空间 BC 的一个有界闭凸子集.定义 $\Gamma: \Omega \rightarrow BC$ 如下:

$$(\Gamma x)(t) = \begin{cases} -\frac{\beta}{p(\tau^{-1}r(t))} - \frac{x(\tau^{-1}(t))}{p(\tau^{-1}(t))} + \frac{(-1)^{m-1}}{p(\tau^{-1}(t))} \\ \int_{\tau^{-1}(t)}^\infty g_{m-1}(\sigma(s),t)[f(s,x(r(s))) - \\ q(s)]\Delta s, \quad t \geq t_1 \\ (\Gamma x)(t_1), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

余下的证明类似于定理 1,因此省略.定理证毕.

定理 4 假设条件(H)、(iv)和式(2)、(3)成立,则方程(1)存在一最终正解.

证明 令 $c = \min\{1-p, \frac{\alpha(1-p)}{2}\}$.由条件(H),式(2)和(3)可知,存在 $t_1 \geq t_0$ 充分大,使得 $t \geq t_1$ 时, $\tau(t), r(t) \geq t_0$,且有

$$\int_{t_1}^\infty g_{m-1}(\sigma(s),0)[aL(s) + |q(s)|]\Delta s \leq c$$

成立.构造空间 BC 的一个有界闭凸子集 Ω :

$$\Omega = \{x \in BC : 1-p \leq x(t) \leq 3, t \geq t_0\}.$$

定义 $\Gamma: \Omega \rightarrow BC$ 如下:

$$(\Gamma x)(t) = \begin{cases} 2+p-p(t)x(\tau(t)) + \\ (-1)^{m-1} \int_t^\infty g_{m-1}(\sigma(s),t)[f(s,x(r(s))) - \\ q(s)]\Delta s, \quad t \geq t_1, \\ (\Gamma x)(t_1), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

剩余的证明类似于定理 1,因此省略.定理证毕.

定理 5 假设条件(H)、(v)和式(2)、(3)成立,且 τ 具有反函数 $\tau^{-1} \in C(T, T)$,则方程(1)存在一最终正解.

证明 选择常数 $\beta > 0$,使得 $1 < \beta < p_1$,令 $c = \min\{\beta - 1, \frac{p_1 - \beta}{2}, \frac{\alpha(\beta - 1)}{2}\}$.由条件(H),式(2)和(3)可知,存在 $t_1 \geq t_0$ 充分大,使得 $t \geq t_0$ 时, $\tau^{-1}(r(t)) \geq t_0$,且有

$$\int_{\tau^{-1}(t)}^\infty g_{m-1}(\sigma(s),0)[aL(s) + |q(s)|]\Delta s \leq c$$

成立.构造集合

$$\Omega = \{x \in BC : \frac{p_1 - \beta}{2p_2} \leq x(t) \leq \frac{p_1 + \beta}{2p_1},$$

$t \geq t_0\}$,

则 Ω 是空间 BC 的一个有界闭凸子集.定义 $\Gamma: \Omega \rightarrow BC$ 如下:

$$(\Gamma x)(t) = \begin{cases} \frac{\beta}{p(\tau^{-1}(t))} - \frac{x(\tau^{-1}(t))}{p(\tau^{-1}(t))} + \frac{(-1)^{m-1}}{p(\tau^{-1}(t))} \cdot \\ \int_{\tau^{-1}(t)}^\infty g_{m-1}(\sigma(s),t)[f(s,x(r(s))) - \\ q(s)]\Delta s, \quad t \geq t_1, \\ (\Gamma x)(t_1), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

剩余的证明类似于定理 1,因此省略.定理证毕.

注 当 $T = R$ 或 $T = N$ 时,定理 1 ~ 定理 5 能得到相应的微分方程及差分方程正解存在的相应结果^[7-9].

3 例子

考虑时间尺度 $T = \{q^n : n \in N_0, q > 1\}$ 上四阶带强迫项中立型动力方程

$$\left(x(t) - \frac{1}{\sqrt{q}}x\left(\frac{t}{q}\right)\right)^{\Delta^4} + \frac{(1-\sqrt{q})(q+1)^2(q^2+1)(q^2+q+1)}{q^{10}t^2(t+q^3)^3}x^3\left(\frac{t}{q}\right) = \frac{2(1-\sqrt{q})(q+1)^2(q^2+1)(q^2+q+1)}{q^{10}t^5}, \quad (6)$$

这里 $m = 4, p(t) = -\frac{1}{\sqrt{q}}, \tau(t) = \frac{t}{q}, q(t) = \frac{2(1-\sqrt{q})(q+1)^2(q^2+1)(q^2+q+1)}{q^{10}t^5}, f(t, x(r(t))) =$

$\frac{(1-\sqrt{q})(q+1)^2(q^2+1)(q^2+q+1)}{q^{10}t^2(t+q^3)^3}x^3(\frac{t}{q^3})$ 。由 $g_k(s,t)$ 定义,易证方程(6)满足定理2的所有条件。因此方程(6)有一个最终正解。事实上, $x(t) = 1 + \frac{1}{t}$ 是方程(6)的一个正解。然而,保证方程(6)存在正解的结果还没有公开发表。

参 考 文 献

- [1] Hilger S. Analysis on measure chains-unified approach to continuous and discrete calculus[J]. Results Math, 1990, 18: 18-56.
- [2] Martin B, Allan P. Dynamic Equations on Time Scales, An Introduction with Applications[M]. Boston: Birkhauser, 2001: 3-45.
- [3] 张炳根. 测度链上微分方程的进展[J]. 中国海洋大学学报: 自然科学版, 2004, 34(5): 907-912.
- [4] Zhu Z Q, Wang Q R. Existence of nonoscillatory solutions to neutral dynamic equations on time scales[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 335(2): 751-762.
- [5] Li T, Han Z, Sun S, et al. Existence of nonoscillatory solutions to second-order neutral delay dynamic equations on time scales[J]. Advances in Difference Equations, 2009(1): 1-10.

(上接第 533 页)

参 考 文 献

- [1] Jakubczyk B, Respondek W. On the linearization of control systems[J]. Ball Acad Polon Sci Math, 1980, 28(4): 517-522.
- [2] Lin Z, Saberi A, Gutmann M. Linear controller for an inverted pendulum having restricted travel: a high-and-low approach[J]. Automatica, 1996, 32(6): 933-937.
- [3] 申铁龙, 梅生伟, 王宏. 鲁棒控制基准设计问题: 倒立摆控制[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(6): 974-975.
- [4] 宋君烈, 萧军. 倒立摆的 lagrange 方程建模与模糊控制[J]. 东北大学学报, 2002(4): 51-54.

- [6] Li Q L, Zhang Z. Existence of solutions to n-th order neutral dynamic equations on time scales[J]. Electronoc J Differential Equations, 2010, 151: 1-8.
- [7] Zhou Y, Zhang B G. Existence of nonoscillatory solutions of higher-order neutral delay difference equations with variable coefficients[J]. Computers Math Applic, 2003, 45(6/9): 991-1000.
- [8] 申建华, 庚建设. 高阶中立型微分方程正解的存在性[J]. 数学学报, 1996, 39(2): 145-155.
- [9] 董文雷, 杨建法. 偶数阶中立型差分方程正解的存在性[J]. 河北师范大学学报: 自然科学版, 2003, 27(2): 116-122.
- [10] Zhang B G, Zhu S L. Oscillation of second order nonlinear delay dynamic equations on time scales[J]. Compu Math Applic, 2005, 49: 599-609.
- [11] 朱善良, 闫信州. 时间测度上具变号系数时滞微分方程解的渐近性与振动性[J]. 青岛科技大学学报: 自然科学版, 2006, 27(2): 182-185.
- [12] 李同兴, 韩振来. 时间尺度上二阶超线性动力方程振动性[J]. 济南大学学报: 自然科学版, 2010, 24(2): 209-211.
- [13] 孙一冰, 韩振来, 李同兴. 二阶拟线性中立型动力方程振动准则[J]. 济南大学学报: 自然科学版, 2010, 24(3): 308-311.
- [14] 张光荣, 孙书荣. 二阶非线性时滞动力方程的振动性[J]. 济南大学学报: 自然科学版, 2010, 24(4): 414-416.
- [15] 韩振来, 孙书荣, 张承慧. 时间尺度上二阶中立型时滞动力方程的振动性[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2010, 49(5): 21-24.

(责任编辑 姜丰辉)

- [5] 石晓霞, 杨毅. 二级倒立摆系统数学模型的建立及意义[J]. 河北工业大学学报, 2001(5): 28-31.
- [6] 张乃尧. 倒立摆的双闭环模糊控制[J]. 控制与决策, 1996(1): 96-98.
- [7] 吴文海. 倒立摆系统模糊控制器设计及仿真[J]. 系统仿真学报, 2004(3): 47-51.
- [8] 胡佳红. 基于遗传算法的倒立摆控制策略研究[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2008.
- [9] 王忠民, 岳宏. 基于 LQR 的倒立摆最优控制系统研究[J]. 工业仪表与自动化装置, 2005(3): 35-37.
- [10] 曾士自. 小车一二级摆摆起倒立的仿人智能控制研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2006.

(责任编辑 姜丰辉)