DOI:10.16351/j.1672-6987.2012.04.001

第 33 卷 第 4 期 2012 年 8 月
青岛科技大学学报(自然科学版) Journal of Qingdao University of Science and Technology(Natural Science Edition)
Vol. 33 No. 4 Aug. 2012

文章编号:1672-6987(2012)04-0427-04

时间尺度上一类高阶中立型动力方程非振动解的存在性

朱善良, 张新丽

(青岛科技大学 数理学院,山东 青岛 266061)

摘　要: 借助时间尺度上的有关理论和不动点定理,研究一类较为广泛的时间尺度上高阶带强迫项非线性中立型动力方程,建立该类方程非振动解存在的充要条件。所得结果推广和改进了已有的结论,并通过一个例子阐述主要结果。

关键词: 动力方程; 时间尺度; 非振动性; 中立型

中图分类号:O175　　　**文献标志码**:A

Existence for Nonoscillatory Solutions of a Class of Higher-order Neutral Dynamic Equations on Time Scales

ZHU Shan-liang, ZHANG Xin-li

(College of Mathematics and Physics, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao 266061, China)

Abstract: By means of the theory on time scales and fixed point theorem, we consider a class of generalized forced higher-order nonlinear neutral dynamic equation on time scales and establish some new sufficient and necessary conditions for the existence of nonoscillatory solutions. The results generalize and improve the known results. An example is given to illustrate the results.

Key words: dynamic equation; time scales; nonoscillatory solution; neutral

时间尺度微积分理论,最初由 Stefan Hilger[1] 于 1988 年在他的博士论文中提出,其目的是为了统一离散与连续这两种分析情形,为同时处理连续系统和离散系统提供了基本方法,以便更好地理解微分方程与差分方程之间的联系与区别。时间尺度上动力系统的性质有极其重要的理论意义和广泛的应用前景[2-3]。目前,时间尺度上的微积分理论的基础已建立[2],关于时间尺度动力方程振动性研究成果较多[3-9]。本文研究一类形式非常广泛的时间尺度上高阶带强迫项中立型动力方程,给出了非振动解存在的充要条件。

收稿日期:2012-05-03
作者简介:朱善良(1977—),男,讲师.

1　预备知识

时间尺度上高阶带强迫项中立型动力方程

$$[x(t)+p(t)x(\tau(t))]^{\Delta^m}+F(t,x(r(t)))=q(t), \tag{1}$$

这里 $\sup T=\infty$, $t\in[t_0,\infty)_T$, $m\in N$, $p\in C([t_0,\infty)_T,R]$, $\tau,r\in C([t_0,\infty)_T,T)$, 且 $\lim\limits_{t\to\infty}\tau(t)=\lim\limits_{t\to\infty}r(t)=+\infty$。假设条件($H_0$)成立: $F\in C(T\times R,R)$, $xF(t,x)\geqslant 0(x\neq 0)$, F 关于 x 是单调非减的。

针对中立项系数的不同范围,得出方程(1)存在非振动解的充要条件。考虑 5 种情况。

(H_1) 存在常数 $p\in(\frac{1}{2},1)$,使得 $|p(t)|\leqslant 1-p, t\geqslant t_0$;$(H_2)$ 存在常数 $p\in(-1,0)$,使得 $p\leqslant p(t)\leqslant 0, t\geqslant t_0$;$(H_3)$ 存在常数 $p\in(0,1)$,使得 $0<p(t)\leqslant p, t\geqslant t_0$;$(H_4)$ 存在常数 $p_1,p_2\in(-\infty,-1)$,使得 $p_1\leqslant p(t)\leqslant p_2, t\geqslant t_0$;$(H_5)$ 存在常数 $p_1,p_2\in(1,+\infty)$,使得 $p_1\leqslant p(t)\leqslant p_2$, $t\geqslant t_0$。

为了证明主要结果,给出下述定义和主要引理。

令 $BC_{rd}([t_0,\infty)_T,R)$ 是定义在 $[t_0,\infty)_T$ 上的具备上确界模 $\|x\|=\sup_{t\geqslant t_0}|x(t)|$ 的所有有界函数 $x(t), t\geqslant t_0$ 的 Banach 空间。假设 $k\in N, s,t\in T$,定义函数序列 $h_k(s,t), g_k(s,t), k=0,1,2,\cdots$ 如下:

$$h_k(t,s)=\begin{cases}1, & k=0,\\ \int_s^t h_{k-1}(\tau,s)\Delta\tau, & k\geqslant 1。\end{cases}$$

$$g_k(t,s)=\begin{cases}1, & k=0,\\ \int_s^t g_{k-1}(\sigma(\tau),s)\Delta\tau, & k\geqslant 1。\end{cases}$$

设 $g_k^{\Delta_t}(t,s)$ 表示对固定 s, $g_k(t,s)$ 对 t 的导数,则由文献[2]中定理 1.60 和定理 1.112 知

$$h_k(t,s)=(-1)^k g_k(t,s),$$

$$g_k^{\Delta_t}(t,s)=\begin{cases}0, & k=0,\\ g_{k-1}(\sigma(t),s), & k\geqslant 1。\end{cases}$$

引理 1[4] 假设 $t\in[t_0,+\infty)_T, n\in N, z(t)$ 有界, $z^{\Delta^n}(t)>0$。则当 $1\leqslant i\leqslant n$ 时,有 $(-1)^{n-i}z^{\Delta^i}(t)>0$。

引理 2[4] 设 $n\in N, s\in T, h\in C_{rd}(T,[0,\infty))$。则当 $\int_s^\infty g_n(\sigma(\theta),s)h(\theta)\Delta\theta<\infty$ 时,有 $\int_t^\infty g_j(\sigma(\theta),t)h(\theta)\Delta\theta<\infty, \forall t\in T$ 和 $0\leqslant j\leqslant n$。

引理 3[4-5] (Kranoselskii's 不动点定理)设 X 是 Banach 空间,Ω 是 X 的一个有界闭凸子集,且存在 2 个映射 $U,S:\Omega\to X$,使得

(i)对 $\forall x,y\in\Omega, Ux+Sy\in\Omega$;(ii)$U$ 是一个压缩映射;(iii)S 是全连续映射。则在 Ω 中,$U+S$ 有一个不动点。

引理 4[4] 设 $s,t\in T, g\in C_{rd}(T\times T,R)$。则

$$\int_s^t\left[\int_\eta^t g(\eta,\xi)\Delta\xi\right]\Delta\eta=\int_s^t\left[\int_s^{\sigma(\xi)} g(\eta,\xi)\Delta\eta\right]\Delta\xi。$$

2 主要结果与证明

定理 1 若条件(H_0)成立,$p(t)$ 满足(H_1)、(H_2)、(H_3)中的任一条件,且有

$$\int_{t_0}^\infty g_{m-1}(\sigma(s),t_0)|q(s)|\Delta s<\infty, \tag{2}$$

则方程(1)存在有界非振动解 $x(t)$ 且 $\liminf_{t\to\infty}|x(t)|>0$ 的充要条件是存在 $K\neq 0$,

使得 $$\int_{t_0}^\infty g_{m-1}(\sigma(s),t_0)F(s,|K|)\Delta s<\infty。 \tag{3}$$

证明 设方程(1)有一个有界非振动解 $x(t)$,满足 $\liminf_{t\to\infty}|x(t)|>0$。假设存在 $K>0$ 和 $t_1\geqslant t_0$,当 $t\geqslant t_1$ 时,有 $x(t)>K, x(\tau(t))>K$, $x(r(t))>K$。

令 $Q(t)=(-1)^m\int_t^\infty g_{m-1}(\sigma(s),t)q(s)\Delta s$, $y(t)=x(t)+p(t)x(\tau(t))$, $z(t)=y(t)-Q(t)$。

则 $Q(t)$ 有界,且 $Q^{\Delta^m}(t)=q(t)$,从而 $y(t)$ 和 $z(t)$ 有界。由方程(1)可知,当 $t\geqslant t_1$,有

$z^{\Delta^m}(t)=-F(t,x(r(t)))\leqslant -F(t,K)<0$。

因此,由上式和引理 1 得 $(-1)^{m-j+1}z^{\Delta^j}(t)>0$, $1\leqslant j\leqslant m$。从而对 $t\geqslant t_1$,有

$$\begin{aligned}&\int_t^\infty g_{m-1}(\sigma(s),t)F(s,K)\Delta s\leqslant\\ &-\int_t^\infty g_{m-1}(\sigma(s),t)z^{\Delta^m}(s)\Delta s=\\ &-\lim_{s\to\infty}(-1)^{m-(m-1)+1}z^{\Delta^{m-1}}(s)g_{m-1}(s,t)+\\ &(-1)^2\int_t^\infty g_{m-2}(\sigma(s),t)z^{\Delta^{m-1}}(s)\Delta s\leqslant\\ &(-1)^2\int_t^\infty g_{m-2}(\sigma(s),t)z^{\Delta^{m-1}}(s)\Delta s,\end{aligned}$$

依此类推,可得

$$\begin{aligned}&\int_t^\infty g_{m-1}(\sigma(s),t)F(s,K)\Delta s\leqslant\\ &(-1)^m\int_t^\infty z^{\Delta}(s)\Delta s\leqslant(-1)^m z(s)\big|_t^\infty<\infty,\end{aligned}$$

由引理 2 知,式(3)成立。

充分性。这里仅证明 $p(t)$ 满足条件(H_1),其他 2 种情形类似可证。对某一常数 $d\neq 0$,选择 $d_1>0, c_1>0$,使得 $0<d_1<(2p-1)|d|$ 和 $d_1+(1-p)|d|<c_1<p|d|$,令 $c=\min\{c_1-d_1-(1-p)|d|, p|d|-c_1\}$。由式(2)和(3)可知,存在 $t_1\geqslant t_0$ 充分大,使得当 $t\geqslant t_1$ 时,$\tau(t)$, $r(t)\geqslant t_0$,且有

$$\int_t^\infty g_{m-1}(\sigma(s),t_1)[F(s,|d|)+|q(s)|]\Delta s\leqslant c。 \tag{4}$$

构造集合 $\Omega=\{x\in BC_{rd}([t_0,\infty)_T,R): d_1\leqslant x(t)\leqslant|d|, t\geqslant t_0\}$,易证 Ω 是空间 $BC_{rd}([t_0,\infty)_T,R)$ 的一个有界闭凸子集。定义 T_1 和 $T_2:\Omega$

$\to BC_{rd}([t_0,\infty)_T,R$ 如下。

$$(T_1x)(t)=\begin{cases}-p(t)x(\tau(t)),\ t\geqslant t_1,\\(T_1x)(t_1),\ t_0\leqslant t\leqslant t_1,\end{cases}$$

$$(T_2x)(t)=\begin{cases}c_1+(-1)^{m-1}\int_t^{\infty}g_{m-1}(\sigma(s),t)[F(s,x(r(s)))-\\ \quad q(s)]\Delta s,\ t\geqslant t_1,\\(T_2x)(t_1),\ t_0\leqslant t\leqslant t_1,\end{cases}$$

以下证明 T_1 和 T_2 满足引理 3 的条件。

对 $\forall x,y\in\Omega,t\geqslant t_0$ 有

$$(T_1x)(t)+(T_2y)(t)\geqslant c_1-|p(t)|x(\tau(t))-\int_t^{\infty}g_{m-1}(\sigma(s),t)[|F(s,x(r(s)))|+|q(s)|]\Delta s\geqslant c_1-(1-p)|d|-\int_{t_1}^{\infty}g_{m-1}(\sigma(s),t_1)[F(s,|d|)+|q(s)|]\Delta s\geqslant c_1-(1-p)|d|-[c_1-d_1-(1-p)|d|]=d_1,$$

$$(T_1x)(t)+(T_2y)(t)\leqslant c_1+(1-p)|d|+\int_{t_1}^{\infty}g_{m-1}(\sigma(s),t_1)[F(s,|d|)]+|q(s)|]\Delta s\leqslant c_1+(1-p)|d|+p|d|-c_1=|d|,$$

因此，$\forall x,y\in\Omega$，有 $T_1x+T_2y\in\Omega$。

下面证明 T_1 是压缩映射。事实上，对于 $\forall x,y\in\Omega,t\geqslant t_1$，有

$$|(T_1x)(t)-(T_2y)(t)|\leqslant|p(t)\|x(\tau(t))-y(\tau(t))|\leqslant(1-p)\|x-y\|。$$

最后证明 T_2 是全连续映射。

（ⅰ）由(1) 的证明知 $T_2\Omega\subset\Omega$。

（ⅱ）证明 T_2 是连续的。令 $x_n\in\Omega$，且当 $n\to\infty$ 时，有 $\|x_n-x\|\to 0$，则 $x\in\Omega$ 且 $\forall t\in[t_0,\infty)_T$。$|x_n(t)-x(t)|\to 0$。对 $t\geqslant t_1$，有

$$|(T_2x_n)(t)-(T_2x)(t)|\leqslant\int_{t_1}^{\infty}g_{m-1}(\sigma(s),t_1)\cdot|F(s,x_n(r(s)))-F(s,x(r(s)))|\Delta s,$$

因为

$$g_{m-1}(\sigma(s),t_1)|F(s,x_n(r(s)))-F(s,x(r(s)))|\leqslant g_{m-1}(\sigma(s),t_1)[|F(s,x_n(r(s)))|+|F(s,x(r(s)))|]\leqslant 2g_{m-1}(\sigma(s),t_1)F(s,|d|),$$

且当 $n\to\infty$，$|F(s,x_n(r(s)))-F(s,x(r(s)))|\to 0$。

由勒贝格控制收敛定理知，$\lim_{n\to\infty}\|T_2x_n-T_2x\|=0$，即 T_2 是连续的。

（ⅲ）证明 $T_2\Omega$ 是一致柯西的。事实上，$\forall\varepsilon>0$，取 $t_2>t_1$，使得

$$\int_{t_2}^{\infty}g_{m-1}(\sigma(s),t_2)[F(s,|d|)+|q(s)|]\Delta s\leqslant\varepsilon,$$

则 $\forall x\in\Omega,t,u\in[t_2,\infty)_T$ 有

$$|(T_2x)(t)-(T_2x)(u)|\leqslant|\int_t^{\infty}|g_{m-1}(\sigma(s),t)[|F(s,x(r(s)))|+|q(s)|]\Delta s|+|\int_u^{\infty}g_{m-1}(\sigma(s),u)[|F(s,x(r(s)))|+|q(s)|]\Delta s|\leqslant 2\int_{t_2}^{\infty}g_{m-1}(\sigma(s),t_2)[F(s,|d|)+|q(s)|]\Delta s\leqslant 2\varepsilon,$$

这说明 $T_2\Omega$ 是一致柯西的。

（ⅳ）以下证明对 $\forall t_2\in[t_2,\infty)_T$，$T_2\Omega$ 在 $[t_0,t_2]_T$ 上是等度连续的。不妨设 $t_2\geqslant t_1$，对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon/\int_{t_0}^{\infty}g_{m-1}(\sigma(s),t_0)[F(s,|d|)+|q(s)|]\Delta s$。对 $\forall x\in\Omega$，当 $t,u\in[t_0,t_2]_T$，且 $|t-u|<\delta$ 时，由引理 2 和引理 4，有

$$|(T_2x)(t)-(T_2x)(u)|=|\int_t^{\infty}|g_{m-1}(\sigma(s),t)(F(s,x(r(s)))-q(s))\Delta s-\int_u^{\infty}g_{m-1}(\sigma(s),u)(F(s,x(r(s)))-q(s))\Delta s|=$$

$$|\int_t^{\infty}[\int_{\sigma(s)}^{t}h_{m-2}(\theta,\sigma(s))(F(s,x(r(s)))-q(s))\Delta\theta]\Delta s-\int_u^{\infty}[\int_{\sigma(s)}^{u}h_{m-2}(\theta,\sigma(s))(F(s,x(r(s)))-q(s))\Delta\theta]\Delta s|=$$

$$|\int_t^{u}[\int_{\theta}^{\infty}g_{m-2}(\sigma(s),\theta)(F(s,x(r(s)))-q(s))\Delta s]\Delta\theta|\leqslant|\int_t^{u}[\int_{t_0}^{\infty}g_{m-2}(\sigma(s),t_0)(F(s,x(r(s)))-q(s))\Delta s]\Delta\theta|=$$

$$|t-r|\int_{t_0}^{\infty}g_{m-2}(\sigma(s),t_0)|(F(s,x(r(s)))-q(s))|\Delta s|\leqslant\delta\int_{t_0}^{\infty}g_{m-2}(\sigma(s),t_0)(F(s,|d|)+|q(s)|)\Delta s<\varepsilon。$$

从而对 $\forall t_2\in[t_2,\infty)_T$，$T_2\Omega$ 在 $[t_0,t_2]_T$ 上是等度连续的，故 $T_2\Omega$ 是全连续映射。由引理 3 知，存在 $x\in\Omega$，使得 $(T_1+T_2)x=x$，易知 $x(t)$ 是方程(1) 的满足 $\lim\inf_{t\to\infty}|x(t)|>0$ 的有界解。证毕。

定理 2　若条件(H_0) 和(2) 成立，$p(t)$ 满足 (H_4) 和 (H_5) 中的任一条件，且 τ 具有反函数 $\tau^{-1}\in C(T,T)$，则方程(1) 存在有界非振动解 $x(t)$ 且 $\lim\inf_{t\to\infty}|x(t)|>0$ 的充要条件是(3)

成立。

证明 必要性的证明类似定理1,这里省略。充分性。仅证明 $p(t)$ 满足条件(H_4),满足(H_5)时类似可证。取常数 $0 < a < b, \beta > 0$,使得 $-ap_1 < \beta < -b(p_2+1)$。令

$$c = \min\left\{\frac{(\beta + ap_1)p_2}{p_1}, -b(p_2+1)-\beta\right\},$$

由式(2)和式(3),取 $t_1 > t_0$ 充分大,使得对 $t \geqslant t_1$,

$$\int_{\tau^{-1}(t)}^{\infty} g_{m-1}(\sigma(s), \tau^{-1}(t)) \cdot [F(s,b) + |q(s)|]\Delta s \leqslant c$$

和 $\tau^{-1}(t)$、$r(\tau^{-1}(t)) \geqslant t_0$。

定义 $BC_{rd}([t_0,\infty)_T, R)$ 上的有界闭凸子集

$$\Omega = \{x \in BC_{rd}([t_0,\infty)_T, R\}: a \leqslant x(t) \leqslant b, t \geqslant t_0\},$$

定义算子 T_1 和 $T_2: \Omega \to BC_{rd}([t_0,\infty)_T, R)$ 如下

$$(T_1x)(t) = \begin{cases} -\dfrac{\beta}{p(\tau^{-1}(t))} - \dfrac{x(\tau^{-1}(t))}{p(\tau^{-1}(t))}, & t \geqslant t_1, \\ (T_1x)(t_1), & t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \end{cases}$$

$$(T_2x)(t) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{m-1}}{p(\tau^{-1}(t))}\displaystyle\int_{\tau^{-1}(t)}^{\infty} g_{m-1}(\sigma(s), \tau^{-1}(t)) \\ [F(s,x(r(s))) - q(s)]\Delta s, & t \geqslant t_1, \\ (T_2x)(t_1), & t_0 \leqslant t \leqslant t_1. \end{cases}$$

类似定理1充分性的证明,可证 T_1 和 T_2 满足引理3的条件,故结论成立。证毕。

注1 当 $T = R$ 或 $T = N$ 时,因为本研究不要求函数研究满足李普希兹条件,所以定理1和定理2推广和改进了相应的微分方程及差分方程非振动解存在的相应结果[10-13]。

注2 定理1和定理2推广和改进了文献[5-7]中的有关结论。

3 实例

设时间尺度 $T = \{q^n: n \in N\} \cup \{0\}$,其中 $q > 1$,考虑四阶带强迫项中立型动力方程

$$\left(x(t) - \frac{1}{\sqrt{q}}x\left(\frac{t}{q}\right)\right)^{\Delta^4} + \frac{(1-\sqrt{q})(q+1)^2(q^2+1)(q^2+q+1)}{q^{10}t^3(t+q^2)^3}x^2\left(\frac{t}{q^3}\right) = \frac{2(1-\sqrt{q})(q+1)^2(q^2+1)(q^2+q+1)}{q^{10}t^5}, \quad (5)$$

这里 $m = 4, p(t) = -\dfrac{1}{\sqrt{q}}, \tau(t) = \dfrac{t}{q}$,

$$q(t) = \frac{2(1-\sqrt{q})(q+1)^2(q^2+1)(q^2+q+1)}{q^{10}t^5},$$

$$f(t, x(r(t))) = \frac{(1-\sqrt{q})(q+1)^2(q^2+1)(q^2+q+1)}{q^{10}t^3(t+q^2)^3}x^2\left(\frac{t}{q^3}\right)。$$

由 $g_k(s,t)$ 定义,易证方程(5)满足定理1的所有条件。因此方程(5)有一个最终非振动解。事实上,$x(t) = 1 + \dfrac{1}{t}$ 是方程(5)的一个非振动解。

参 考 文 献

[1] Hilger S. Analysis on measure chains-unified approach to continuous and discrete calculus[J]. Results Math, 1990, 18: 18-56.

[2] Boher M, Peterson A. Dynamic Equations on Time Scales, An Introduction with Applications[M]. Boston: Birkhauser, 2001:1-56.

[3] 张炳根. 测度链上微分方程的进展[J]. 中国海洋大学学报:自然科学版,2004,34(5):907-912.

[4] Sun T X, Xi H, Peng X, et al. Noscillatory solutions for higher-order neutral dynamic equations on time scales[J]. Abstract and Applied Analysis, 2010:428963.

[5] Zhu Z Q, Wang Q R. Existence of nonoscillatory solutions to neutral dynamic equations on time scales[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 335(2): 751-762.

[6] Zhang Z, Dong W, Li Q, et al. Existence of nonoscillatory solutions for higher order neutral dynamic equations on time scales [J]. Appl Math Comput, 2008, 28(1/2): 29-38.

[7] 朱善良. 时间尺度上高阶带强迫项中立型动力方程正解的存在性[J]. 青岛科技大学学报:自然科学版,2011,32(5):534-537.

[8] 邸聪娜,李民良,王莹,等. 时标上具有正负项的非线性中立型动力方程非振动解的存在性[J]. 西南师范大学学报:自然科学版,2011,36(2):36-38.

[9] 李同兴,韩振来. 时间尺度上二阶超线性动力方程振动性[J]. 济南大学学报:自然科学版,2010,24(2):209-211.

[10] Zhou Y, Zhang B G. Existence of nonoscillatory solutions of higher-order neutral delay difference equations with variable coefficients[J]. Computers Math Applic, 2003, 45(6/7/8/9): 991-1000.

[11] 申建华,庚建设. 高阶中立型微分方程正解的存在性[J]. 数学学报,1996,39(2):145-155.

[12] 董文雷,杨建法. 偶数阶中立型差分方程正解的存在性[J]. 河北师范大学学报:自然科学版,2003,27(2):116-122.

[13] Zhang B G, Sun Y J. Existence of nonoscillatory solutions of a class of nonlinear difference equations with a forced term [J]. Mathematica Bohemica, 2001, 126(3): 639-647.

(责任编辑 姜丰辉)