DOI:10.16351/j.1672-6987.2013.02.002

第 34 卷 第 2 期 青岛科技大学学报(自然科学版) Vol. 34 No. 2
2013 年 4 月 Journal of Qingdao University of Science and Technology(Natural Science Edition) Apr. 2013

文章编号:1672-6987(2013)02-0212-04

时间尺度上二维动力系统的振动性和渐近性

朱善良

(青岛科技大学 数理学院,山东 青岛 266061)

摘 要:借助时间尺度的有关理论,运用不动点定理和不等式技巧研究时间尺度上一类非线性动力系统的渐近性和振动性。给出具有某种渐近性的非振动解存在和所有解振动的充要条件,推广并改进已有某些结果。

关键词:动力系统;时间尺度;振动性;二维

中图分类号:O 175 **文献标志码**:A

Oscillation and Asymptotic Behavior for Two-dimensional Dynamic Systems on Time Scales

ZHU Shan-liang

(College of Mathematics and Physics, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao 266061, China)

Abstract: By means of the theory on time scales, fixed point theorem and inequalities technique, the auchor considers the oscillation and asymptotic behavior for the nonlinear dynamic system on time scales, and establishs some sufficient and necessary conditions for the existence of oscillatory and nonoscillatory solutions with special asymptotic properties. The results in this paper extend and improve the results given in literatures.

Key words: dynamic system; time scales; oscillation; two-dimensional

时间尺度微积分理论,最初由 Stefan Hilger[1] 于 1988 年在他的博士论文中提出,其目的是为了统一离散与连续这两种情形,为同时处理连续系统和离散系统提供了基本方法。时间尺度上动力系统的性质有极其重要的理论意义和广泛的应用前景[2-3]。目前,时间尺度上的微积分理论的基础已建立[2],但关于时间尺度上动力系统振动性的结果还不多[4-8]。为此,本文研究时间尺度上动力系统的振动性和渐近性问题。

1 预备知识

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t)=a(t)g(y(t)), \\ y^{\Delta}(t)=-f(t,x^{\sigma}(t)), \end{cases} t\in[t_0,\infty)_{\mathrm{T}}。 \tag{1}$$

这里 T 是一个时间尺度(实数集上的闭集),$sub\mathrm{T}=\infty$,$[t_0,\infty)_{\mathrm{T}}=[t_0,\infty)\cap \mathrm{T}$,$\sigma$ 是前跃算子,$a\in C_{rd}([t_0,\infty)_{\mathrm{T}},[0,\infty))$,$g\in C(R,R)$,且当 $u\neq 0$ 时,$ug(u)>0$。$f(t,u):[t_0,\infty)_{\mathrm{T}}\times R\to R$ 关于 u 是连续函数,且当 $t\in[t_0,\infty)_{\mathrm{T}}$,$u\neq 0$ 时,$uf(t,u)>0$。

动力系统(式 1)不仅包括二维线性或非线性微分和差分系统,还包括一些重要的时间尺度上二阶动力方程,对这些系统和方程振动性的研究成果较多,且主要考虑函数 $f(t,u)$ 中变量 t 和 u 是分离的情况,如文献[9-14]及其它参考文献。

2 主要结果

为了证明的需要,给出下述符号和假设。

收稿日期:2012-05-31
作者简介:朱善良(1977—),男,讲师.

令 $BC([t_0,\infty)_T,R)$ 是定义在 $[t_0,+\infty)_T$ 上的具备上确界模 $\|x\|=sup_{t\geqslant t_0}|x(t)|$ 的所有有界函数 $x(t),t\geqslant t_0$ 的 *Banach* 空间。定义函数 $A(s,t)$ 如下。

$$A(s,t)=\int_s^t a(\tau)\Delta\tau,\quad s,t\in[t_0,\infty)_T。$$

关于函数 $f(t,u)$ 和 $g(u)$ 作如下假设。

(H_1) 对任给的常数 l 和 L，且 $L>l>0$，存在正常数 h 和 H（可能与 l 和 L 有关），当 $l\leqslant|u|\leqslant L$ 时，有 $hf(t,l)\leqslant|f(t,u)|\leqslant Hf(t,L)$，　$t\in[t_0,\infty)_T$。

(H_2) 存在常数 $k>0$，使得

$g(uv)\geqslant kg(u)g(v),\forall uv>0$。

(H_3) 存在一个连续非减函数 $\varphi:R\to R$，使得

$$\operatorname{sgn}\varphi(u)=\operatorname{sgn}u,\quad \int_0^{\pm\infty}\frac{du}{g(\varphi(u))}<\infty,$$

且 $|f(t,u)|\geqslant|f(t,w)||\varphi(u)|$，　$t\in[t_0,\infty)_T$，$|u|\geqslant u_0$，这里 $u_0>0$ 是某一常数，$w\neq0$，满足 $sgnw=sgnu$。

定理 1　假设 (H_1) 成立，且函数 g 是非减的。则系统(1)存在满足 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=\alpha\neq0$ 和 $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$ 的非振动解 $(x(t),y(t))$ 的充要条件是存在 $c\neq0$ 和 $d>0$，使得

$$\int_{t_0}^{\infty}a(t)g\left(d\int_t^{\infty}|f(s,c)|\Delta s\right)\Delta t<\infty。\tag{2}$$

证明

必要性。 设 $(x(t),y(t))$ 是系统(1)的一个非振动解，满足 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=\alpha\neq0$ 和 $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$。不失一般性，假设 $\alpha>0$，则存在 $t_1\in[t_0,\infty)_T$ 和 $L>l>0$，使得 $l\leqslant x(t)\leqslant L,\forall t\in[t_1,\infty)_T$。由条件 (H_1) 知，存在 $h>0$，使得

$$f(t,x^\sigma(t))\geqslant hf(t,l),\quad\forall t\in[t_1,\infty)_T。\tag{3}$$

由系统(1)的第 2 个方程得

$$y(s)-y(t)=-\int_t^s f(\tau,x^\sigma(\tau))\Delta\tau,$$

令 $s\to\infty$，则

$$y(t)=\int_t^{\infty}f(\tau,x^\sigma(\tau))\Delta\tau,\quad\forall t\in[t_1,\infty)_T,\tag{4}$$

由式(3)、(4)和系统(1)的第 1 个方程得

$$\infty>\lim_{t\to\infty}x(t)-x(t_1)=\int_{t_1}^{\infty}a(s)g(y(s))\Delta s=$$
$$\int_{t_1}^{\infty}a(s)g\left(\int_s^{\infty}f(\tau,x^\sigma(\tau))\Delta\tau\right)\Delta s\geqslant$$
$$\int_{t_1}^{\infty}a(s)g\left(h\int_s^{\infty}f(\tau,l)\Delta\tau\right)\Delta s,$$

即式(2)成立，这里 $d=h$，　$c=l$。

充分性。 设式(2)成立，不妨设 $c>0$。由条件 (H_1) 知，存在 $H>0$，当 $\frac{c}{2}\leqslant x(t)\leqslant c$ 时，有 $f(t,x^\sigma(t))\leqslant Hf(t,c)$，　$\forall t\in[t_0,\infty)_T$。由式(2)可知，存在 $t_1\in[t_0,\infty)_T$ 充分大，使得

$$\int_{t_1}^{\infty}a(s)g\left(H\int_s^{\infty}f(\tau,c)\Delta\tau\right)\Delta s\leqslant\frac{c}{2}。\tag{5}$$

构造集合

$$\Omega=\left\{x\in BC([t_0,\infty)_T,R):\quad\frac{c}{2}\leqslant x(t)\leqslant c\right\},$$

则 Ω 是 $BC([t_0,\infty)_T,R)$ 的一个有界闭凸子集。定义 $\Gamma:\Omega\to BC([t_0,\infty)_T,R)$ 如下

$$(\Gamma x)(t)=\begin{cases}c-\displaystyle\int_t^{\infty}a(s)g\left(\int_s^{\infty}f(\tau,x^\sigma(\tau))\Delta\tau\right)\Delta s, & t\in[t_1,\infty)_T,\\ c-\displaystyle\int_{t_1}^{\infty}a(s)g\left(\int_s^{\infty}f(\tau,x^\sigma(\tau))\Delta\tau\right)\Delta s, & t\in[t_0,t_1)_T。\end{cases}$$

以下证明 Γ 满足 Schauder 不动点定理[15] 的条件。

对于 $\forall x\in\Omega$，　$t\in[t_1,\infty)_T$，由式(5)得

$$c\geqslant(\Gamma x)(t)=$$
$$c-\int_t^{\infty}a(s)g\left(\int_s^{\infty}f(\tau,x^\sigma(\tau))\Delta\tau\right)\Delta s\geqslant$$
$$c-\int_{t_1}^{\infty}a(s)g\left(H\int_s^{\infty}f(\tau,c)\Delta\tau\right)\Delta s\geqslant c-\frac{c}{2}=\frac{c}{2}。$$

类似可证，$\forall x\in\Omega$，　$t\in[t_0,t_1)_T$，有 $\frac{c}{2}\leqslant(\Gamma x)(t)\leqslant c$，因此 $\forall x\in\Omega$，有 $\Gamma x\in\Omega$。

以下证明 Γ 是全连续映射。

(i) 证明 Γ 是连续的。令 $x_n\in\Omega$，且当 $n\to\infty$ 时，有 $\|x_n-x\|\to0$，则 $x\in\Omega$ 且 $\forall t\in[t_0,\infty)_T$，$|x_n(t)-x(t)|\to0$。对 $t\in[t_1,\infty)_T$，有

$$|(\Gamma x_n)(t)-(\Gamma x)(t)|=$$
$$\left|\int_t^{\infty}a(s)g\left(\int_s^{\infty}f(\tau,x_n{}^\sigma(\tau))\Delta\tau\right)\Delta s-\right.$$
$$\left.\int_t^{\infty}a(s)g\left(\int_s^{\infty}f(\tau,x^\sigma(\tau))\Delta\tau\right)\Delta s\right|\leqslant$$
$$\int_{t_1}^{\infty}a(s)\left|g\left(\int_s^{\infty}f(\tau,x_n{}^\sigma(\tau))\Delta\tau\right)-\right.$$
$$\left.g\left(\int_s^{\infty}f(\tau,x^\sigma(\tau))\Delta\tau\right)\right|\Delta s。$$

因为

$$a(s)\left|g\left(\int_s^{\infty}f(\tau,x_n{}^\sigma(\tau))\Delta\tau\right)-\right.$$
$$\left.g\left(\int_s^{\infty}f(\tau,x^\sigma(\tau))\Delta\tau\right)\right|\leqslant$$

$a(s)\left(\left|g\left(\int_s^\infty f(\tau,x_n{}^\sigma(\tau))\Delta\tau\right)\right|+\right.$
$\left.\left|g\left(\int_s^\infty f(\tau,x^\sigma(\tau))\Delta\tau\right)\right|\right)\leqslant$
$2a(s)g\left(H\int_s^\infty f(\tau,c)\Delta\tau\right)$,

且 g 和 f 是连续函数。由勒贝格控制收敛定理知，$\lim_{n\to\infty}\|\Gamma x_n-\Gamma x\|=0$，即 Γ 是连续的。

(ii) 证明 $\Gamma\Omega$ 是一致柯西的。事实上，$\forall\varepsilon>0$，取 $t_2\in[t_1,\infty)_T$，且 $t_2>t_1$，使得

$$\int_{t_2}^\infty a(s)g\left(H\int_s^\infty f(\tau,c)\Delta\tau\right)\Delta s\leqslant\varepsilon,$$

则 $\forall x\in\Omega$，　$t,r\in[t_2,\infty)_T$ 有

$$|(\Gamma x)(t)-(\Gamma x)(r)|\leqslant$$
$$\left|\int_t^\infty a(s)g\left(H\int_s^\infty f(\tau,c)\Delta\tau\right)\Delta s\right|+$$
$$\left|\int_r^\infty a(s)g\left(H\int_s^\infty f(\tau,c)\Delta\tau\right)\Delta s\right|\leqslant$$
$$2\int_{t_2}^\infty a(s)g\left(H\int_s^\infty f(\tau,c)\Delta\tau\right)\Delta s\leqslant 2\varepsilon,$$

这说明 $\Gamma\Omega$ 是一致柯西的。

(iii) 以下证明对 $\forall t_2\in[t_0,\infty)_T$，$\Gamma\Omega$ 在 $[t_0,t_2]_T$ 上是等度连续的。不妨设 $t_2>t_1$，则对 $\forall x\in\Omega$，当 $t,r\in[t_0,t_1]_T$，有 $|(\Gamma x)(t)-(\Gamma x)(r)|=0$，且对 $t,r\in[t_1,t_2]_T$，有

$$|(\Gamma x)(t)-(\Gamma x)(r)|=$$
$$\left|\int_t^\infty a(s)g\left(\int_s^\infty f(\tau,x^\sigma(\tau))\Delta\tau\right)\Delta s-\right.$$
$$\left.\int_r^\infty a(s)g\left(\int_s^\infty f(\tau,x^\sigma(\tau))\Delta\tau\right)\Delta s\right|\leqslant$$
$$\left|\int_t^r a(s)g\left(H\int_s^\infty f(\tau,c)\Delta\tau\right)\Delta s)\right|,$$

因此，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $t,r\in[t_0,t_2]_T$，且 $|t-r|<\delta$ 时，有 $|(\Gamma x)(t)-(\Gamma x)(r)|<\varepsilon$，即对 $\forall t_2\in[t_0,\infty)_T$，$\Gamma\Omega$ 在 $[t_0,t_2]_T$ 上是等度连续的。由 Arzela-Ascoli 定理[15] 知，$\Gamma\Omega$ 是相对紧的。从而 Γ 是全连续映射。

由 Schauder 不动点定理，存在 $x\in\Omega$，使得 $\Gamma x=x$。因此，有

$$x(t)=c-\int_t^\infty a(s)g\left(\int_s^\infty f(\tau,x^\sigma(\tau))\Delta\tau\right)\Delta s,$$

$t\in[t_1,\infty)_T$。

令 $y(t)=\int_t^\infty f(\tau,x^\sigma(\tau))\Delta\tau$，$\forall t\in[t_1,\infty)_T$，则 $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$，$y^\Delta(t)=-f(t,x^\sigma(t))$，

故 $x(t)=c-\int_t^\infty a(s)g(y(s))\Delta s$，且 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=c$ 和 $x^\Delta(t)=a(t)g(y(t))$。定理证毕。

推论 1　假设 (H_1) 和 (H_2) 成立，且函数 g 是非减的。则系统(1) 存在满足 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=\alpha\neq0$ 和 $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$ 的非振动解 $(x(t),y(t))$ 的充要条件是存在某常数 $c\neq0$，使得

$$\int_{t_0}^\infty a(t)g\left(\int_t^\infty|f(s,c)|\Delta s\right)\Delta t<\infty。\tag{6}$$

定理 2　假设 $\lim\limits_{t\to\infty}A(t_0,t)=\infty$，$(H_1)\sim(H_3)$ 成立，且函数 g 是非减的。则系统(1) 振动的充要条件是对 $\forall c\neq0$，有

$$\int_{t_0}^\infty a(t)g\left(\int_t^\infty|f(s,c)|\Delta s\right)\Delta t=\infty。\tag{7}$$

证明

必要性。若式(7) 不成立，则由定理 1 知，系统(1) 存在满足 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=\alpha\neq0$ 和 $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$ 的非振动解 $(x(t),y(t))$，这与已知系统(1) 振动矛盾。

充分性。假设式(7) 成立，且系统(1) 有非振动解 $(x(t),y(t))$。不妨设 $x(t)>0$，　$t\in[t_1,\infty)_T$，这里 $t_1\in[t_0,\infty)_T$。由条件 $\lim\limits_{t\to\infty}A(t_0,t)=\infty$ 易证 $y(t)>0$，$t\in[t_1,\infty)_T$，故从系统(1) 的第 2 个方程知 $y^\Delta(t)<0$，　$t\in[t_1,\infty)_T$，从而 $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)\geqslant0$。从系统(1) 的第 1 个方程知 $x^\Delta(t)>0$，　$t\in[t_1,\infty)_T$，且 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=\infty$。

从 t 到 ∞ 积分系统(1) 的第 2 个方程得

$$y(t)\geqslant\int_t^\infty f(s,x^\sigma(s))\Delta s,\quad\forall t\in[t_1,\infty)_T。\tag{8}$$

由条件 (H_2)、式(8) 和函数 φ 的非减性得

$$\frac{x^\Delta(t)}{g(\varphi(x^\sigma(t)))}=\frac{a(t)g(y(t))}{g(\varphi(x^\sigma(t)))}\geqslant$$
$$\frac{a(t)g\left(\int_t^\infty f(s,x^\sigma(s))\Delta s\right)}{g(\varphi(x^\sigma(t)))}\geqslant$$
$$ka(t)g\left(\int_t^\infty\frac{f(s,x^\sigma(s))}{\varphi(x^\sigma(s))}\Delta s\right),\quad\forall t\in[t_1,\infty)_T。\tag{9}$$

由条件 (H_3) 和 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=\infty$ 知，存在 $t_2\in[t_1,\infty)_T$ 和 $l>0$，使得

$$\frac{f(t,x^\sigma(t))}{\varphi(x^\sigma(t))}\geqslant f(t,l),\quad\forall t\in[t_2,\infty)_T。\tag{10}$$

由式(9) 和式(10)，得

$$\frac{x^\Delta(t)}{g(\varphi(x^\sigma(t)))}\geqslant ka(t)g\left(\int_t^\infty f(s,l)\Delta s\right)。\tag{11}$$

从 t_2 到 t 积分式(11) 得

$$\int_{t_2}^{t}\frac{x^{\Delta}(s)}{g(\varphi(x^{\sigma}(s)))}\Delta s \geqslant$$
$$k\int_{t_2}^{t}a(s)g\left(\int_{s}^{\infty}f(\tau,l)\Delta\tau\right)\Delta s。 \tag{12}$$

由于函数 g、φ 和 x 是非减的，故有

$$\int_{t_2}^{t}\frac{x^{\Delta}(s)}{g(\varphi(x^{\sigma}(s)))}\Delta s \leqslant \int_{t_2}^{t}\frac{x^{\Delta}(s)}{g(\varphi(x(s)))}\Delta s。 \tag{13}$$

由条件(H_3)、式(12)和(13)得

$$k\int_{t_2}^{t}a(s)g\left(\int_{s}^{\infty}f(\tau,l)\Delta\tau\right)\Delta s \leqslant$$
$$\int_{x(t_2)}^{x(t)}\frac{\mathrm{d}u}{g(\varphi(u))} < \infty, \tag{14}$$

当 $t\to\infty$ 时，式(14)与式(7)矛盾。定理证毕。

注　定理 1 和定理 2 推广并改进了文献[5，8-10]中的相应结果。

参 考 文 献

[1] Hilger S. Analysis on measure chains-unified approach to continuous and discrete calculus[J]. Results Math, 1990, 18:18-56.

[2] Boher M, Peterson A. Dynamic equations on time scales, an introduction with applications[M]. Boston: Birkhauser, 2001:1-56.

[3] 张炳根. 测度链上微分方程的进展[J]. 中国海洋大学学报：自然科学版，2004，34(5)：907-912.

[4] Erbe L, Mert R. Some new oscillation results for a nonlinear dynamic system on time scales[J]. Appl Math Comput, 2009, 215:2405-2412.

[5] Fu S C, Lin M L. Oscillation and nonoscillation criteria for linear dynamic systems on time scales[J]. Comput Math Appl, 2010, 59:2552-2565.

[6] Xu Y J, Xu Z T. Oscillation criteria for two-dimensional dynamic systems on time scales[J]. J Comput Math Appl, 2009, 225:9-19.

[7] Erbe L, Mert R. Oscillation for a nonlinear dynamic system on time scales[J]. J Diff Equ Appl, 2011, 17(9): 1333-1350.

[8] Anderson D R. Oscillation and nonoscillation criteria for two-dimensional time-scale systems of first-order nonlinear dynamic equations[J]. Electronic J Diff Equ, 2009, 24: 1-13.

[9] Li W T. Classification schemes for nonoscillatory of two-dimensional nonlinear difference systems[J]. Comput Math Appl, 2001, 42:341-355.

[10] Jiang J C, Li X P. Oscillation and nonoscillation of two-dimensional difference systems[J]. J Comput Appl Math, 2006, 188:77-88.

[11] Agarwal R P, Bohner M, Sake S H. Oscillation criteria for a certain class of second order Emden-Fowler dynamic equations[J]. Electron Trans Numer Anal, 2007, 27: 1-12.

[12] 李同兴，韩振来. 时间尺度上二阶超线性动力方程振动性[J]. 济南大学学报：自然科学版，2010，24(2)：209-211.

[13] 孙一冰，韩振来，李同兴. 二阶拟线性中立型动力方程振动准则[J]. 济南大学学报：自然科学版，2010，24(3)：308-311.

[14] 朱善良. 时间尺度上高阶带强迫项中立型动力方程正解的存在性[J]. 青岛科技大学学报：自然科学版，2011，32(5)：534-537.

[15] Zhu Z Q, Wang Q R. Existence of nonoscillatory solutions to neutral dynamic equations on time scales[J]. J Math Anal Appl, 2007, 335(2):751-762.

（责任编辑　姜丰辉）

（上接第 211 页）

参 考 文 献

[1] Bernstein S N. Sur la meilleure approximation de |x| par des polynomes de degres donnes[J]. Acta math, 1913, 37:1-57.

[2] Newman D J. Rational approximation to |x| [J]. Mich Math J, 1964, 11:11-14.

[3] Iliev G I, Opitz U. Comonotone approximation of |x| by rational functions[J]. Serdica Bulgar Math Publ, 1984, 10(1): 88-105.

[4] Brutman L, Passow E. On rational interpolation to |x| [J]. Constr Approx, 1997, 13:381-391.

[5] 张慧明，李建俊. |x|在(−∞，+∞)的有理逼近[J]. 山西师范大学学报：自然科学版，2009，23(3)：27-31.

[6] Brutman L, Passow E. Rational interpolation to |x| at the Chebyshev nodes[J]. Bull Austral Math Soc, 1997, 56:81-86.

[7] 张慧明，李建俊. |x|在第二类 Chebyshev 结点的有理逼近[J]. 郑州大学学报：理学版，2010，42(2)：1-3.

[8] Han Xuli. On the order of approximation for the rational interpolation to |x| [J]. Approx. Theory & its Appl, 2002, 18(2):58-64.

[9] 张慧明，门玉梅，李建俊. |x|在正切结点组的有理插值[J]. 天津师范大学学报：自然科学版，2011，31(4)：5-6.

[10] Werner H. Rational interpolation von |x| in aquidistanten punkten[J]. Math Z, 1982, 180:11-17.

（责任编辑　姜丰辉）